Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2012-08-22

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående. Därefter fås optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$ och $z = -3$. Lösning: Gör en enhet av produkt 1 (Ståhlberg har rätt), vilket ger kostnaden -3 (dvs. vinsten 3). Det andra bivillkoret är aktivt.

2b: Läs av duallösningen ur optimaltablån: $y_1 = 0$, $y_2 = -3/4 = -0.75$. (Resten är standard.)

2c: Ny lösning: $x_1 = 5/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3/2$, $x_5 = 0$ och $z = -15/4 = -3.75$.

2d: P0: Första LP-opt: $x_1 = 5/4 = 1.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ och $z = -3.75$. Detta ger $\underline{z} = -3$.
Förgrena över x_1: Skapa P1 = P0 + ($x_1 \leq 1$), och P2 = P0 + ($x_1 \geq 2$).
Lös P1 ($x_1 \leq 1$): Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 1/3 = 0.33$ med $z = -3.33$.
Förgrena över x_3: Skapa P3 = P1 + ($x_3 \leq 0$), och P4 = P1 + ($x_3 \geq 1$).
Lös P3 ($x_1 \leq 1, x_3 \leq 0$): Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$ med $z = -3$. Detta är heltal, så $\bar{z} = -3$. Kapa.
Både P4 och P2 har ärvt $\underline{z} = -3$ från P0, så båda kan kapas.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$.

Uppgift 2

2a: Problemet är *inte* konvext. (Målfunktionen är faktiskt konkav.)

2b: (Detaljer utelämnas.) Punkten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ ger $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = -3$, $u_4 = -1$, så den är ej en KKT-punkt.

För punkten $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ fås $u_1 = 0$, $u_2 = 7/4$, $u_3 = 0$, $u_4 = 13/4$, så den är en KKT-punkt.

Punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 4/3$ ger $u_1 = 0$, $u_2 = 11/9$, $u_3 = 5/9$, $u_4 = 0$, så den är en KKT-punkt.

De två senare punkterna är lokala minima, och den bästa av dem, $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, är optimal. (Det krävs dock lite mer undersökning för att vara säker på det.)

Uppgift 3

3a: Billigaste uppspännande träd. Lös med Kruskals eller Prims metod. Kostnad 20. (Det spelar ingen roll att det finns negativ bågkostnad.)

3b: Handelsresandeproblemet. Närmaste granne går inte så bra (grafen är inte fullständig). Andra heuristiker kan ge en tur med kostnad 46. Billigaste 1-träd kostar 28, så vi får $28 \leq z^* \leq 46$.

3c: Kinesiska brevbärarproblemet. I lösningen till uppgift 3b är det trivialt, eftersom all noder har valens två, så det är bara att köra runt en gång. I lösningen till uppgift 3a blir lite svårare, eftersom noder med udda valens förekommer.

Uppgift 4

4a: Kolla först att lösningen är tillåten, både avseende nodjämviktsvillkor och båggränser. Bestäm sedan vilka bågar som är basbågar. Man måste ta med alla som har $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$, plus eventuellt flera så att man får ett uppspännande träd. Eftersom man kan få ett uppspännande träd på detta sätt, är det en baslösning.

4b: Basbågar: (1,4), (4,2), (2,5), (1,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_4 = 8$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$, $y_5 = 11$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 10$ (optimalt), $\hat{c}_{32} = 5$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = 2$ (optimalt), $\hat{c}_{45} = 6$ (minska).

Detta ger x_{45} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 5-4-2-5, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir vilken som helst i den cykeln. Jag är smart och väljer x_{45} (för då ändras inga nodpriser och inga reducerade kostander). Man ser då direkt att lösningen är optimal.

4c: $\hat{c}_{35} = c_{35} + y_3 - y_5 = c_{35} + 3 - 11 = c_{35} - 8 < 0$ om $c_{35} < 8$.

Uppgift 5

5a: Använd Fords metod, ty negativ bågkostnad gör att Dijkstras metod ej fungerar. Väg: 1 - 4 - 6 - 5 - 7, kostnad 16.

5b: $\hat{c}_{25} = c_{25} + y_2 - y_5 = c_{25} + 10 - 11 = c_{25} - 1 < 0$ om $c_{25} < 1$.

Uppgift 6

Maximal flödesökande väg blir 1-3-2-4-5-6, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter. Nästa maximala flödesökande väg blir 1-2-3-5-4-6, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter. Sedan blir det maxflöde. Ett minsnitt är t.ex. (4,6), (5,6).

Uppgift 7

7a: LP-dualen blir min $19y$ då $10y \geq 6$, $9y \geq 3$, $7y \geq 7$, $7y \geq 5$, $y \geq 0$.

Uppenbarligen är $y = 1$ tillåten och optimal.

7b: Endast tredje duala bivillkoret är aktivt, så komplementaritet ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Eftersom $y > 0$, krävs likhet i primala bivillkoret, så vi får $7x_3 = 19$, vilket ger $x_3 = 19/7$.