Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2013-03-11

# Svar och kortfattade lösningar

*(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)*

## Uppgift 1

**1a:** Variabeldefinition: $x_j = 1$ om reningsverk $j$ byggs, 0 om inte.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl} \max & z = & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\ \text{då} & & 10x_1 & + & 10x_2 & + & 12x_3 & + & 8x_4 & \leq & 34 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

**2b:** Kvoter för LP-lösning ($c_j/a_j$): $x_1$: 3/10=0.3, $x_2$: 4/10=0.4, $x_3$: 6/12=0.5, $x_4$: 5/8=0.625, vilket ger $x_4$ bäst, sedan $x_3$, $x_2$ och $x_1$.

Första LP-lösning (P0): $x_4 = 1$, $\hat{b} = 34 - 8 = 26$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 26 - 12 = 14$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 14 - 10 = 4$, $x_1 = 4/10 = 0.4$, $\hat{b} = 0$, $z = 16.2$, vilket ger $\bar{z} = 16$.

Förgrena över $x_1$: P1 = P0 + ($x_1 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 1$).

P1: Fixering $x_1 = 0$. Optimering: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 34 - 8 = 26$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 26 - 12 = 14$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 14 - 10 = 4$, $z = 15$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 15$.

P2: Fixering: $x_1 = 1$, $\hat{b} = 34 - 10 = 24$. Optimering: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 24 - 8 = 16$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 16 - 12 = 4$, $x_2 = 4/10 = 0.4$, $\hat{b} = 0$, $z = 15.6$, vilket ger $\bar{z} = 15$.
Kapa, ty bättre än $z = 15$ kan ej fås.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, med $z = 15$.
Svar i ord: Bygg reningsverk 2, 3 och 4.

## Uppgift 2

**2a:** Kinesiskt brevbärarproblem. Alla noder har inte jämn valens, så det finns ingen Eulertur (dvs. en tur som inte kör någon gata två gånger). Noderna 2, 3, 4 och 7 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa noders valens är bågarna (2,7) och (3,4), så de bågarna ska köras två gånger.

**2b:** Handelsresandeproblem. *NP*-svårt. Finn tillåten lösning med någon lämplig heuristik. (Närmaste granne misslyckas dock.) Man kan notera att nod 8 och 6 har valens två, så bågarna (1,8), (8,4), (4,6) och (6,5) måste vara med i turen. Detta gör att bågarna (1,4) och (4,5) inte får vara med. Det enda som återstår är att hitta en väg från nod 5 till nod 1 som också passerar noderna 2, 3 och 7, t.ex. vägen 5-7-3-2-1. Vi får turen 1-8-4-6-5-7-3-2-1, med kostnad 55.

En optimistisk uppskattning fås lämpligtvis av billigaste 1-träd, vilket har kostnad 51.

Optimum ligger alltså mellan 51 och 55.

**2c:** Billigaste uppspännande träd-problem. Lös med Kruskals eller Prims metod. Kostnad: 44.

**2d:** Steinerträdsproblem. *NP*-svårt. Utgående från billigaste uppspännande träd: Ta bort alla noder som inte måste vara med som har valens ett. För alla noder som inte måste vara med och har valens två: Kolla om direktbågen är billigare. Besparing: 11, vilket ger totalkostnad 33.

## Uppgift 3

**3a:** Maximera antal tusenlappar för att slippa tre nollor.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 & (1) \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 7 & (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Inför slackvariabler. Starta med slackvariablerna i basen. Först blir $x_2$ inkommande och $x_5$ utgående. Sedan blir $x_3$ inkommande och $x_4$ utgående. Därefter fås optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 7/3 \approx 2.33$, $x_3 = 11/3 \approx 3.67$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ och $z = 79/3 \approx 26.33$. Lösning: Gör 2.33 st Racer och 3.67 st TourDeLux, vilket ger vinsten 26333 kr. Båda bivillkoren är aktiva, dvs. både sadlar och växeldrev tar slut.

**3b:** Läs av skuggpriser ur optimaltablån: $y_1 = 4$, $y_2 = 1/3 \approx 0.33$. Om första högerledet ökas med 1 och andra minskas med 1 fås målfunktionsändringen $4 * 1 - 0.33 * 1 = 3.67 > 0$, så man tjänar på att byta ett växeldrev mot en sadel. Tvärtom skulle ge en lika stor förlust.

**3c:** Beräkna reducerad kostnad: $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 6 - 2y_1 = 6 - 2 * 4 = -2 < 0$. Att öka denna variabel skulle ge förlust. Gör ingen tandemcykel.

## Uppgift 4

**4a:** Konvex målfunktion och linjära bivillkor ger ett konvext problemet.

**4b:** Extrempunkter är (1,0) och (0,1).

I punkten (1,0) är andra bivillkoret inte aktivt, så KKT2 ger $u_2 = 0$. KKT3 ger $u_1 = 2$ och $u_3 = -2 < 0$, så den är ej en KKT-punkt.

I punkten (0,1) är tredje bivillkoret inte aktivt, så KKT2 ger $u_3 = 0$. KKT3 ger $u_1 = 4$ och $u_2 = -4 < 0$, så den är ej en KKT-punkt.

Ingen av extrempunkterna är alltså optimal.

**4c:** Antagandet gör att KKT2 ger $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$. KKT3 ger då $2x_1 - u_1 = 0$ och $4x_2 - u_1 = 0$, dvs. $x_1 = u_1/2$ och $x_2 = u_1/4$. Antagandet ger även att $x_1 + x_2 = 1$ (KKT1). Insättning ger $x_1 + x_2 = u_1/2 + u_1/4 = 3u_1/4 = 1$, vilket ger $u_1 = 4/3 > 0$, så detta är en KKT-punkt. Lösningen är $x_1 = u_1/2 = 2/3$ och $x_2 = u_1/4 = 1/3$. Detta är optimum, eftersom problemet är konvext. I ord: Blanda 0.333 liter av vätska 1 med 0.666 liter av vätska 2.

## Uppgift 5

**5a:** Variabeldefinition: $x_{ijk} = 1$ om siffra $k$ skrivs i position $(i, j)$, och 0 annars, för $i, j, k = 1, 2, 3$.

Problemet har ingen målfunktion, och följande bivillkor.

$$
\begin{array}{rcllll}
\sum_j x_{ijk} & = & 1 & \text{för } i,k = 1,2,3 & (1) & \text{(en gång i varje rad)} \\
\sum_i x_{ijk} & = & 1 & \text{för } j,k = 1,2,3 & (2) & \text{(en gång i varje kolumn)} \\
\sum_k x_{ijk} & = & 1 & \text{för } i,j = 1,2,3 & (3) & \text{(en siffra på varje plats)} \\
x_{ijk} & \in & \{0,1\} & \text{för } i,j,k = 1,2,3 & & \\
x_{ijk} & = & \bar{x}_{ijk} & \text{för givna siffror} & &
\end{array}
$$

**5b:**
$x_{111} = 1$ ger: (1): $x_{121} = 0$, $x_{131} = 0$. (2): $x_{211} = 0$, $x_{311} = 0$. (3): $x_{112} = 0$, $x_{113} = 0$.
$x_{212} = 1$ ger: (1): $x_{222} = 0$, $x_{232} = 0$. (2): $x_{312} = 0$. (3): $x_{213} = 0$.
$x_{231} = 1$ ger: (1): $x_{211} = 0$, $x_{221} = 0$. (2): $x_{331} = 0$. (3): $x_{232} = 0$, $x_{233} = 0$.
I (1) för $i = 3$, $k = 1$ har vi $x_{331} = 0$, $x_{311} = 0$, så $x_{321} = 1$. (Siffra 1 är nu klar.)
$x_{321} = 1$ ger: (3): $x_{322} = 0$, $x_{323} = 0$.
I (1) för $i = 3$, $k = 2$ har vi $x_{312} = 0$, $x_{322} = 0$, så $x_{332} = 1$.
$x_{332} = 1$ ger: (2): $x_{132} = 0$. (3): $x_{333} = 0$.
I (1) för $i = 1$, $k = 2$ har vi $x_{112} = 0$, $x_{132} = 0$, så $x_{122} = 1$. (Siffra 2 är nu klar.)
$x_{122} = 1$ ger: (3): $x_{123} = 0$.
I (1) för $i = 1$, $k = 3$ har vi $x_{113} = 0$, $x_{123} = 0$, så $x_{133} = 1$.
I (1) för $i = 2$, $k = 3$ har vi $x_{213} = 0$, $x_{233} = 0$, så $x_{223} = 1$.
I (1) för $i = 3$, $k = 3$ har vi $x_{323} = 0$, $x_{333} = 0$, så $x_{313} = 1$. (Siffra 3 är nu klar.)

## Uppgift 6

**6a:** Basbågar: (1,2), (1,6), (2,4), (3,5), (4,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -6$, $y_6 = -7$, $y_4 = 0$, $y_5 = 7$, $y_3 = 1$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{23} = 3$ (optimalt), $\hat{c}_{41} = 10$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 6$ (optimalt), $\hat{c}_{64} = -1$ (öka).

Detta ger $x_{64}$ som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 6-4-2-1-6, ändringen blir 1 enhet, och utgående variabel blir $x_{24}$.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -6$, $y_6 = -7$, $y_4 = -1$, $y_5 = 6$, $y_3 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{23} = 2$ (optimalt), $\hat{c}_{24} = 1$ (optimalt). $\hat{c}_{41} = 9$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 6$ (optimalt).

Lösningen är optimal, och bättre än Bortanskogs lösning.

**4b:** $\hat{c}_{23} = c_{23} + y_2 - y_3 = 6 + (-6) - 0 = 0$, så detta förbättrar inte lösningen.

**4c:** Kör Dijkstras metod med start i nod 6. Det ger nodmärkningar för alla uppnåeliga noder, dvs. billigaste väg till alla noder (utom till nod 2, som inte kan nås från nod 6). Nodmärkningarna ger billigaste vägträdet: nod 1: (7,6), nod 2: (-,-), nod 3: (13,4), nod 4: (6,6), nod 5: (13,4), nod 6: (0,-).

**4d:** Maxflödesproblem ska bara ha en startnod och en slutnod. Inför därför en extra startnod, s, med bågar till noderna 2 och 3, med hög kapacitet, och en extra slutnod, t, med bågar från nod 1 och 5, med hög kapacitet. Följande vägsökningar fås: s-2-1-t, kapacitet: 10. s-2-4-1-t, kapacitet: 10. s-3-5-t, kapacitet: 10. Sedan är det stopp. Maxflöde är alltså 30. Minsnittet går runt noderna 2 och 3.

## Uppgift 7

**7a:** Efter första steget är $\alpha = (4, 3, 5, 4)$ och $\beta = (0, 2, 3, 4)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En tillåten och optimal lösning fås t.ex. för $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$ och $x_{44} = 1$, dvs. tekniker 1 felsöker kod 1, tekniker 2 felsöker kod 2, tekniker 3 felsöker kod 3, tekniker 4 felsöker kod 4. Totaltid: 25. (Det finns många andra lika bra lösninger.)

**7b:** Den enda skillnaden är att $\alpha_3$ minskar med 2 enheter. $\hat{C}$ blir oförändrad, och därmed också den primala lösningen.