Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2013-06-03

Lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Handelsresandeproblem. (*NP*-svårt.) Lämplig relaxation: Billigaste 1-träd. Lösning: (1,2), (1,3), (2,3), (3,5), (4,5), (4,6). Kostnad: 30, vilket blir undre gräns. En tur, 1 - 2 - 5 - 6 - 4 - 3 - 1, har kostnad 37, vilket blir övre gräns. Optimala kostnaden ligger alltså mellan 30 och 37.

1b: Förgrena över nodvalens. (Se boken för detaljer.) I exemplet har nod 3 valens tre.
P1: $x_{13} = 0$.
P2: $x_{13} = 1$. $x_{23} = 0$.
P3: $x_{13} = 1$. $x_{23} = 1$. $x_{34} = 0$. $x_{35} = 0$.
Finn billigaste 1-träd för varje problem.

1c: Kinesiska brevbärarproblemet. Finn billigaste sättet att dubblera bågar så att alla noder får jämn valens. Noderna 1 och 2 har udda valens. Lägg till bågen (1,2). Den ska köras två gånger. Totalkostnad: 66.

Uppgift 2

2a: Kör Dijkstras metod med start i nod 1. Det ger nodmärkningar för alla noder, dvs. billigaste väg till alla noder. Nodmärkningarna ger billigaste vägträdet (kostnad, föregångare): nod 1: (0,-), nod 2: (22,5), nod 3: (6,1), nod 4: (11,3), nod 5: (15,4), nod 6: (17,4).

2b: Aktuella för vändning: (2,1): $\hat{c}_{12} = 0 + 5 - 22 = -17$. (4,1): $\hat{c}_{14} = 0 + 11 - 11 = 0$. Att vända (4,1) ger ingen vinst, men att vända (2,1) sänker ett nodpris med 17, så välj den.

2c: Maxflöde från nod 5 till nod 4, med alla bågkapaciteter lika med ett.
Första vägsökningen (med Dijkstra) ger vägen: 5-3-4. Kapacitet 1, skicka. Ändra tillåtna riktningar. I andra vägsökningen kan Dijkstras metod bara märka nod 5, 2, 3, 1, så vi har maxflöde 1, och minsnittet är (3,4) framåt samt (4,1), (4,5) och (6,5) baklänges.

Uppgift 3

3a:
Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-5	-4	-4	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	200
x_5	0	2	2	0	0	1	0	250
x_6	0	1	0	2	0	0	1	280

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	1	-4	0	5/2	0	625
x_4	0	0	0	1	1	-1/2	0	75
x_1	0	1	1	0	0	1/2	0	125
x_6	0	0	-1	2	0	-1/2	1	155

Sedan blir x_3 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	1	0	4	1/2	0	925
x_3	0	0	0	1	1	-1/2	0	75
x_1	0	1	1	0	0	1/2	0	125
x_6	0	0	-1	0	-2	1/2	1	5

Därefter fås optimum. $x_1 = 125$, $x_2 = 0$, $x_3 = 75$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 5$, och $z = 925$. Svar: Gör 125 satser av sort 1 och 75 av sort 3. Vinsten blir 925 kr. Vi får 5 hovtänger över.

3b: Skuggpriserna är $y_1 = 4$, $y_2 = 0.5$ och $y_3 = 0$. Det verkar bäst att öka antalet plattänger (bivillkor 1) med 10, vilken skulle ge vinsten 40.

3c: LP-dual:

$$
\begin{array}{llcccccccc}
\min & v = & 200y_1 & + & 250y_2 & + & 280y_3 & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 5 \\
 & & y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 4 \\
 & & y_1 & & & + & 2y_3 & \geq & 4 \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Läs av duallösningen ur optimaltablån: $y_1 = 4$, $y_2 = 0.5$ och $y_3 = 0$.

Uppgift 4

Första LP-lösning (P0): $x_1 = 1.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.75$, och $z = 9.25$, vilket ger $\bar{z} = 9$. Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, samt $\underline{z} = 5$.

Förgrena över x_3: P1 = P0 + ($x_3 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_3 \geq 1$).

P2: ($x_3 \geq 1$): $x_1 = 0.8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, och $z = 8$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Förgrena över x_1: P3 = P2 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P2 + ($x_1 \geq 1$).

P4: ($x_3 \geq 1$, $x_1 \geq 1$): Saknar tillåten lösning. Kapa.

P3: ($x_3 \geq 1$, $x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.4$, och $z = 5.6$, vilket ger $\bar{z} = 5 = \underline{5}$. Kapa.

P1: ($x_3 \leq 0$): $x_1 = 1.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, och $z = 6.25$, vilket ger $\bar{z} = 6$.

Förgrena över x_1: P5 = P1 + ($x_1 \leq 1$), P6 = P1 + ($x_1 \geq 2$).

P6: ($x_3 \leq 0$, $x_1 \geq 2$): Saknar tillåten lösning. Kapa.

P5: ($x_3 \leq 0$, $x_1 \leq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, och $z = 5$, heltal, vilket ger $\underline{z} = 5$. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, med $z = 5$.
Svar i ord: Gör 100 satser av typ 1.

Uppgift 5

5a: Efter första steget är $\alpha = (200, 320, 198, 230)$ och $\beta = (0, 61, 2, 0)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 5 & 33 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 29 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En tillåten (och optimal) lösning fås för $x_{14} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$ och $x_{42} = 1$, dvs. målare 1 målar hus 4, målare 2 målar hus 1, målare 3 målar hus 3, målare 4 målar hus 2. Totaltid: 1011.

5b: Eftersom $\alpha_2 = 320$ medan α_1, α_3 och α_4 ligger kring 200, är målare 2 långsammast. När det gäller hus, ser vi att $\beta_2 = 61$, medan $\beta_1 = 0$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 0$, så hus 2 är mer tidskrävande än de andra tre.

Uppgift 6

6a:
Basträd: (1,2), (1,3), (2,4), (2,6), (3,5).
Nodpriser: $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$, $y_4 = 9$, $y_5 = 12$, $y_6 = 12$.
Reducerade kostnader: $\hat{c}_{34} = c_{34} + y_3 - y_4 = 4 + 6 - 9 = 1 > 0$, opt.
$\hat{c}_{46} = c_{46} + y_4 - y_6 = 5 + 9 - 12 = 2 > 0$, opt.
$\hat{c}_{56} = c_{56} + y_5 - y_6 = 6 + 12 - 12 = 6 > 0$, opt.

6b:
$\hat{c}_{45} = c_{45} + y_4 - y_6 = c_{45} + 9 - 12 = c_{45} - 3 < 0$ om $c_{45} < 3$.

6c:
$\hat{c}_{34} = c_{34} + y_3 - y_4 = 2 + 6 - 9 = -1 < 0$, öka flödet. x_{34} inkommande, cykel: 3 - 4 - 2 - 1 - 3, kap: 1, utgående: x_{24}, $d = 1$.

Nodpriser: $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$, $y_4 = 8$, $y_5 = 12$, $y_6 = 12$.
Reducerade kostnader: $\hat{c}_{24} = c_{24} + y_2 - y_4 = 4 + 5 - 8 = 1 > 0$, opt.
$\hat{c}_{46} = c_{46} + y_4 - y_6 = 5 + 8 - 12 = 1 > 0$, opt.
$\hat{c}_{56} = c_{56} + y_5 - y_6 = 6 + 12 - 12 = 6 > 0$, opt.

Ändring i totalkostnad: $\hat{c}_{34} d = -1$.

6d:
Inför en ny nod, 7, som är en sänka av styrka 1, gör nod 5 och 6 till mellannoder, och

sänk källstyrkan i nod 1 från 5 till 4. Inför två bågar, (5,7) och (6,7), med kostnad 0.

Uppgift 7

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 8 \\ 8x_2 - 4 \end{pmatrix}$$

Punkt (1,0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren $x_1 + x_2 \leq 1$ och $x_2 \geq 0$ aktiva, men $x_1 \geq 0$ inte är aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
dvs. $u_1 = 2$ och $u_1 - u_3 = 2$, vilket ger $u_1 = 2 > 0$ och $u_3 = -2 < 0$, så enligt KKT4 är detta inte en KKT-punkt.

Punkt (0,1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren $x_1 + x_2 \leq 1$ och $x_1 \geq 0$ aktiva, men $x_2 \geq 0$ inte är aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
dvs. $u_1 - u_2 = 8$ och $u_1 = -4$, vilket ger $u_1 = -4 < 0$ och $u_2 = -12 < 0$, så enligt KKT4 är detta inte en KKT-punkt.

Om första bivillkoret hade varit $x_1 + x_2 = 1$, skulle KKT4 inte krävt att $u_1 \geq 0$. Det ändrar dock inte resultatet, eftersom u_2 resp. u_3 hade fel tecken.