Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2013-10-28

Svar och kortfattade lösningar

Uppgift 1

1a: Problemet skrivet i standardform är:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 \\ \text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 - 9 \le 0 \\ & g_2(x) = x_1 - x_2 \le 0 \\ & g_3(x) = -x_1 + 0.5x_2 \le 0 \\ & g_4(x) = -x_1 \le 0 \\ & g_5(x) = -x_2 \le 0 \end{array}$$

(Genom att rita upp det tillåtna området, ser man att de två sista bivillkoren är redundanta och kan tas bort.)

Gradienterna blir $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 4x_2 - 2 \\ -4x_1 + 6x_2 - 4 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

KKT3 blir generellt $\begin{pmatrix} 4x_1 - 4x_2 - 2 \\ -4x_1 + 6x_2 - 4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(Eftersom bivillkor 4 och 5 är redundanta, kan man direkt sätta $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.)

Bivillkoren är linjära och målfunktionen konvex, ty $H(x) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ (se ledningen med $K = 4$ och $\delta = 2$).

Punkt $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Alla bivillkor utom 1 är aktiva, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Om man har satt $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$ (se ovanstående motivation), så fås ekvationssystemet $u_2 - u_3 = 2$ och $-u_2 + 0.5u_3 = 4$, som har den unika lösningen $u_2 = -10 < 0$ och $u_3 = -12 < 0$, så enligt KKT4 är detta inte en KKT-punkt.

Om man inte har satt $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$, så fås ingen unik lösning i u. Man får ekvationssystemet $u_2 - u_3 - u_4 = 2$ och $-u_2 - 0.5u_3 - u_5 = 4$, vilket exempelvis kan skrivas om som $u_2 = -10 - u_4 - 2u_5$ och $u_3 = -12 - 2u_4 - 2u_5$, och om vi kräver $u_4 \ge 0$

och $u_5 \geq 0$, kan u_2 och u_3 aldrig få något annat än negativa värden. KKT4 kan alltså aldrig uppfyllas, så $x^{(1)}$ inte en KKT-punkt.

Punkt $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Endast bivillkor 2 är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs. $-2 + u_2 = 0$ och $2 - u_2 = 0$, vilket ger $u_2 = 2 \geq 0$, så KKT4 är uppfyllt och $x^{(2)}$ är en KKT-punkt.

Punkt $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Endast bivillkor 2 är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs. $-2 + u_2 = 0$ och $4 - u_2 = 0$, vilket inte har någon lösning, så $x^{(3)}$ är inte en KKT-punkt.

Eftersom problemet är konvext, är KKT-punkten $x^{(2)}$ optimal.

1b: Gradienterna till bivillkoren ges ovan. För att en punkt ska vara en KKT-punkt, ska $-\nabla f(x)$ ligga i konen som spänns upp av de aktiva bivillkorsgradienterna. Genom att rita upp, ser man att gradienterna till bivillkor 2 och 3 ger en större kon än bivillkor 4 och 5, alltså ska man välja bivillkor 2 och 3. Ett exempel är $\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, som indikerar en KKT-punkt med $u_3 = 2$ och $u_2 = 0$. Bivillkor 4 och 5 kan inte visa att detta är en KKT-punkt. (Detta kan också motiveras av att bivillkor 4 och 5 är redundanta, medan 2 och 3 inte är det.)

Uppgift 2

2a:
Inför slackvariabler x_3, x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-4	-2	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	0	9
x_4	0	1	-1	0	1	0	0
x_5	0	-1	1/2	0	0	1	0

Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-6	0	4	0	0
x_3	0	0	2	1	-1	0	9
x_1	0	1	-1	0	1	0	0
x_5	0	0	-1/2	0	1	1	0

Sedan blir x_2 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	3	1	0	27
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	9/2
x_1	0	1	0	1/2	1/2	0	9/2
x_5	0	0	0	1/4	3/4	1	9/4

Därefter fås optimum. $x_1 = 4.5$, $x_2 = 4.5$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2.25$,) och $z = 27$. Svar: Ta 4.5 dl vatten och 4.5 dl socker. (Det andra bivillkoret är inte aktivt.)

2b: Skuggpriset är $y_1 = 3$, så en ökning av detta högerled med en enhet skulle ge en ökning av målfunktionsvärdet med 3.

2c: Reducerad kostnad för den nya variabeln, x_6, blir $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y$, där $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, och y är den optimala duallösningen, som läses ut ur optimaltablån: $y_1 = 3$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$. Vi får $\hat{c}_6 = c_6 - 3$, så x_6 blir inkommande om $c_6 - 3 > 0$, dvs. $c_6 > 3$. Svar: $c_6 \geq 4$ (eller $c_6 \geq 3$ om vi accepterar att det finns flera optimala baslösningar, där en har med den nya variabeln och en inte).

Uppgift 3

3a: Det är ett handelsresandeproblem, som är *NP*-svårt. Det är osannolikt att han hittar en optimerande app/kod för det problemet. Det finns kanske heuristiker av okänd kvalitet tillgängliga.

3b: Närmaste-granne-heuristiken är den enklaste. Den ger t.ex. turen 1-2-5-7-6-3-4-1, med kostnad 56.

3c: En lämplig relaxation är billigaste 1-träd, vilket har kostnad 50, och innhåller bågarna (1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (4,5), (5,7) och (6,7).

Det optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 50 och 56.

Uppgift 4

4a: Kinesiskt brevbärarproblem. Ja, polynomisk optimerande metod finns.

4b: Alla noder har inte jämn valens, så det finns ingen Eulertur (dvs. en tur som inte kör på någon redan sandad väg). Noderna 3 och 7 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa noders valens är bågarna (3,6) och (6,7), så de bågarna ska köras två gånger. Kostnaden blir summan av alla bågkostnader plus 12, vilket är 107. En optimal tur ges exempelvis av 1-2-3-6-7-5-3-6-7-4-5-2-4-1.

Uppgift 5

5a: Problemet kan ses som Dynamisk programmering, och en optimal lösning kan finnas med en billigaste-väg-metod, t.ex. Dijkstras metod.

Billigaste vägen blir 1a-2a-3a-4a-5b-6b och kostar 105.

Lösningen blir att köra med sommardäck i tre veckor och sedan byta.

5b: Öka antal steg (veckor) till 52. Inför bågar "neråt", dvs. för att byta från dubbdäck till sommardäck. Inför en tredje nivå i grafen, motsvarande dubbfria vinterdäck. Om man ska införa möjligheter att byta fram och tillbaka mellan alla däcksorter är en smaksak. Jag skulle göra det, och lita på att kostnaderna gör att man inte byter för mycket. (Man måste beräkna kostnaderna för alla bågar, så en långtidsprognos för vädret behövs.)

Uppgift 6

6a: Det är ett linjärt minkostnadsflödesproblem, som kan lösas med simplexmetoden för nätverk. Grafen är tudelad, men det spelar ingen roll för metoden.

6b: Grafen blir tudelad, med noderna 1, 2 och 3 i första nivån (odlingar), och noderna 4 och 5 i andra (fabriker). Källstyrkan är 20, 9 och 7 i noderna 1, 2 och 3, och sänkstyrkan är 15 och 21 i noderna 4 och 5.

Den givna startlösningen ger följande basbågar: (1,5), (2,4), (3,4) och (3,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -12$, $y_3 = -5$, $y_4 = 13$, $y_5 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{25} = -1 < 0$ (inte optimalt, öka).

Detta ger x_{25} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 2-5-3-4-2, ändringen blir 1 enhet, och utgående variabel blir x_{35}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -11$, $y_3 = -4$, $y_4 = 14$, $y_5 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = 1 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

6c: Vi har nu ett tillordningsproblem.

Den tredje kolumnen i kostnadsmatrisen motsvarar en fiktiv fabrik, som tar emot de päron som i verkligheten inte ska skickas någonstans. Det är viktigt att bågkostnaderna är lika från alla odlingarna.

Lös problemet med ungerska metoden. Efter första steget är $\alpha = (0, 0, 0)$ och $\beta = (14, 12, 0)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu stryka nollorna med två streck, rad 1 och kolumn 3. Det minsta ostrukna elementet är 4, så vi drar bort det från alla ostrukna element, och lägger till det till det dubbelt strukna. Detta ger

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En tillåten och optimal lösning fås för $x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, och $x_{31} = 1$, dvs. odling 1 levererar till fabrik 2, odling 2 levererar inte (dvs. till fiktiva fabrik 3) och odling 3 levererar till fabrik 1.

Uppgift 7

7a: Variabeldefinition: x_j är antal träd som plockas av på odling j.

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{då} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\
& & l_j \leq x_j \leq u_j \quad \text{för alla } j \\
& & x_j \text{ heltal, för alla } j
\end{array}
$$

7b: Nu förenklas problemet till

$$
\begin{array}{rl}
\max & z = 7x_1 + 10x_2 \\
\text{då} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& 2 \leq x_1 \leq 8 \\
& 1 \leq x_2 \leq 7 \\
& x_1, x_2 \text{ heltal}
\end{array}
$$

P0, första LP-lösningen (grafiskt): $x_1 = 4.5$, $x_2 = 1$, $z = 41.5$, vilket ger $\bar{z} = 41$.

Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 4$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 5$).

Gå ner i $\leq$-grenen först.

P1: Grafisk lösning ger $x_1 = 4$, $x_2 \approx 1.333$, $z \approx 41.333$, vilket ger $\bar{z} = 41$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 1$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 2$).

P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $z = 38$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 38$. Kapa.

P4: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 41$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 41$. Kapa.

P2: Tillåten lösning saknas. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, med $z = 41$.
Svar i ord: Plocka av tre träd på odling 1 och 2 träd på odling 2. Detta ger en vinst på 4100 kr.

7c: Optimallösningen blir LP-lösningen i P0 i uppgift a: $x_1 = 4.5$, $x_2 = 1$, $z = 41.5$, dvs. plocka av 4.5 träd på odling 1 och 1 träd på odling 2, vilket ger vinsten 4150 kr. Man skulle alltså tjäna 50 kr på att tillåta plockning av delar av träd.