Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2016-08-26

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4 - x_8. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-2	-3	-1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1000
x_5	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	500
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	500
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Först blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-2	0	-4	0	3	0	0	0	0
x_4	0	1	0	2	1	-1	0	0	0	1000
x_2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	500
x_7	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	500
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Nu blir x_3 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	2	1	0	0	0	2000
x_3	0	0.5	0	1	0.5	-0.5	0	0	0	500
x_2	0	0.5	1	0	0.5	0.5	0	0	0	500
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	500
x_7	0	-0.5	0	0	-0.5	-0.5	0	1	0	0
x_8	0	-0.5	0	0	-0.5	0.5	0	0	1	0

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 500$, $x_3 = 500$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 500$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$) med $z = 2000$. Svar i ord: Satsa 500 polletter på alt 2 och 500 på alt 3, vilket förväntas ge 2000 äpplen. Optimallösningen är inte unik eftersom $\hat{c}_1 = 0$ och x_1 är inte basvariabel.

1b: Duallösning utläst från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$. Stoppa in den i de duala bivillkoren och kolla. Stoppa in den och den primala lösningen i komplementaritetsvillkoren och kolla. Lösningen är degenererad, vilket ses på att i ett eller flera komplementaritetsvillkor fås noll gånger noll.

1c: En pollett till skulle ge 2 äpplen till, eftersom $y_1 = 2$. En pollett till på alt 3 skulle enligt skuggpriset inte ge någon ökning, ty $y_5 = 0$.

Uppgift 2

Variabeldefinition: $x_{ijk} = 1$ om siffra k placeras i rad i kolumn j, 0 om inte.
Matematisk modell: Finn en tillåten lösning till följande bivillkor där vissa x_{ijk} är fixerade:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} x_{ijk} &= 1 \qquad k = 1, \ldots 4,\ j = 1, \ldots 4 \qquad (1)\\
\sum_{j=1}^{4} x_{ijk} &= 1 \qquad k = 1, \ldots 4,\ i = 1, \ldots 4 \qquad (2)\\
\sum_{k=1}^{4} x_{ijk} &= 1 \qquad i = 1, \ldots 4,\ j = 1, \ldots 4 \qquad (3)\\
\sum_{(i,j)\in R_l} x_{ijk} &= 1 \qquad k = 1, \ldots 4,\ l = 1, \ldots 4 \qquad (4)\\
x_{ijk} &\in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots 4,\ j = 1, \ldots 4,\ k = 1, \ldots 4
\end{aligned}$$

Den angivna lösningen är $x_{112} = 1$, $x_{121} = 1$, $x_{134} = 1$, $x_{143} = 1$, $x_{213} = 1$, $x_{224} = 1$, $x_{231} = 1$, $x_{242} = 1$, $x_{311} = 1$, $x_{323} = 1$, $x_{332} = 1$, $x_{344} = 1$, $x_{414} = 1$, $x_{422} = 1$, $x_{433} = 1$, $x_{441} = 1$, och resten noll.

Bivillkor 1 säger en av varje siffra i varje kolumn, uppfyllt. Bivillkor 2 säger en av varje siffra i varje rad, uppfyllt. Bivillkor 3 säger en siffra i varje position, uppfyllt. Bivillkor 4 säger en av varje siffra i varje mindre kvadrat, uppfyllt.

Balas metod: Varje gång vi sätter $x_{ijk} = 1$ blir alla andra variabler i samma bivillkor fixerade till 0. Om alla variabler utom en i ett visst bivillkor är fixerade till 0, måste den återstående variabeln fixeras till 1. Löp igenom alla bivillkor gång på gång tills inga fixeringar gjorts på en hel cykel.

Uppgift 3

I graferna B, D och E har alla noder jämn valens, så de kan ritas utan att lyfta pennan. I graf A måste båge (2,5) och (3,8) ritas två gånger. I graf C måste båge (1,5) och (4,7) ritas två gånger. I graf F måste båge (1,4) och (3,5) ritas två gånger.

Uppgift 4

4a: Finn först billigaste väg från nod 1 till nod 5, sedan billigaste väg från nod 5 till nod 12, och till sist billigaste väg från nod 12 till nod 10. Använd Dijkstras metod.

Första vägen: 1-2-7-6-8-5, kostnad: 40. Andra vägen: 5-10-9-12, kostnad: 28. Tredje vägen: 12-8-5-10, kostnad: 24. Detta ger hela vägen: 1-2-7-6-8-5-10-9-12-8-5-10, kostnad: 92.

4b: Första vägsökningen i uppgift a gav nodpriser på alla noder (eller åtminstone de noder som fick lägre nodpris än nod 5). Välj att börja med den nod av 5, 12 och 10 som har lägst nodpris. Vi har $y_5 = 40$, $y_{12} = 24$ och $y_{10} = 39$, så det är bäst att ta nod 12 först. (Därefter är det bäst att gå 12-8-5-10, vilket gör att hela vägen kostar 48.)

Uppgift 5

5a: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne ger turen 1-6-5-4-7-8-3-2-1, vilken kostar 72. En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket får kostnaden 65. Vi har alltså en tillåten lösning, som ger övre gräns på 72, samt en undre gräns på 65, så i värsta fall är vår lösning 7 dyrare än optimum.

5b: Billigaste uppspännande träd. Lös med Kruskals (eller Prims) metod. Optimalkostnad: 53.

Uppgift 6

6a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,7), (7,6), (6,8), (11,8), (8,5), (8,9), (5,10), (4,10) och (3,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 15$, $y_3 = 25$, $y_4 = 43$, $y_5 = 46$, $y_6 = 29$, $y_7 = 22$, $y_8 = 36$, $y_9 = 46$, $y_{10} = 54$, $y_{11} = 25$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{1,11} = -15 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{11,7} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 1 > 0$ (ej optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{37} = 15 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{36} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 23 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{95} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{10,9} = 18 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar utom (2,3) uppfyller optimalitetskriterierna. I båge (2,3) vill vi minska flödet, så x_{23} blir inkommande variabel, för minskning. Cykeln blir 3-2-7-6-8-5-10-4-3, och den största ändring som kan göras är 1 p.g.a. båge (5,10), så $x_{5,10}$ blir utgående variabel.

De nodpriserna som ändras är $y_3 = 26$, $y_4 = 44$, $y_{10} = 55$, (resten är oförändrade) och följande reducerade kostnader ändras: $\hat{c}_{37} = 16 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{36} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{5,10} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{10,9} = 19 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller nu optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal. Kostnaden minskade med 1 ($\hat{c}_{23}$ gånger ändringens storlek).

6b: Börja om med Abels lösning. Nu fås $\hat{c}_{23} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), så lösningen är optimal. (Om man börjar med optimallösningen i uppgift a, får man göra iterationen baklänges.)

6c: En vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 1-2-7-6-8-5-10, med kapacitet 4, skicka 4. Ändra tillåtna riktningar, enbart båge (5,10) blir full.

Nästa vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 1-11-8-9-5-4-10, med kapacitet 4, skicka 4. Ändra tillåtna riktningar, bågarna (1,11), (9,5) och (5,4) blir fulla.

Nästa vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 1-2-3-4-10, med kapacitet 2, skicka 2. Ändra tillåtna riktningar, enbart båge (4,10) blir full.

Nu är bågarna till nod 10 fulla, så minsnittet är bågarna (4,10, (5,10) och (10,9). (Man tar även med bågar åt fel håll, som ju måste vara tomma.) Maxflödet är 10.

Uppgift 7

7a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + x_2 - 20 \\ 8x_2 + x_1 - 5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Kontroll av Hessianen visar att problemet är konvext.)

För punkt A: (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 14 > 0$ och $u_3 = 10 > 0$, så KKT4 är uppfyllt. Detta är en KKT-punkt, och optimal, eftersom problemet är konvext.

För punkt B: (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -20 \\ -5 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = -20 < 0$ och $u_3 = -5 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt C: (0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -19 \\ 3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -3 < 0$ och $u_3 = -22 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt D: (0.5, 0.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -16.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 16.5$ och $u_1 = 0.5$, vilket inte kan hända, så KKT3 saknar lösning.

7b: För varje punkt: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (1, 1, 2, 1)$ och $\beta = (0, 1, 2, 3)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 samt kolumn 1 och 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1, 2, 3, 2)$ och $\beta = (-1, 0, 2, 3)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{14} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$, och total inkompabilitet blir 12.

Optimal duallösning är $\alpha = (1, 2, 3, 2)$ och $\beta = (-1, 0, 2, 3)$. Summering av duallösningen ger 12, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: En optimal duallösning fås genom att öka β_1 ökas med 4 enheter, resten blir helt oförändrat. Den primala optimallösningen blir oförändrad. Alla tillåtna lösningar blir 4 dyrare.