Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2016-10-28

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-6	-5	-1	0	0	0
x_4	0	3	4	2	1	0	600
x_5	0	3	4	0	0	1	500

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	3	-1	0	2	1000
x_4	0	0	0	2	1	-1	100
x_1	0	1	4/3	0	0	1/3	500/3

Nu blir x_3 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	3	0	1/2	3/2	1050
x_3	0	0	0	1	1/2	-1/2	500
x_1	0	1	4/3	0	0	1/3	500/3

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 \approx 167$, $x_2 = 0$, $x_3 = 50$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$) med $z = 1050$. Svar i ord: Gör 167 påsar av sort 1 och 50 påsar av sort 3. Det ger vinsten 1050 kr. Båda bivillkoren är aktiva. Optimallösningen är unik eftersom $\hat{c}_j \neq 0$ för någon icke-basvariabel.

1b: Duallösning utläst från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 1/2$, $y_2 = 3/2$. Stoppa in den i de duala bivillkoren och kolla. Stoppa in den och den primala lösningen i komplementaritetsvillkoren och kolla.

1c: En grön paprika till skulle ge 0.5 kr till, eftersom $y_1 = 1/2$. En röd paprika till skulle ge 1.5 kr till, eftersom $y_2 = 3/2$. Röda ger mest ökning.

1d: Ny variabel x_6: reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - 3y_1 - 2y_2 = c_6 - 4.5 > 0$ om $c_6 > 4.5$. Alltså mer än 4.50 kr.

1e: Rita in duala bivillkoret $3y_1 + 2y_2 \geq c_6$, där c_6 är större än 4.5, exempelvis 5. Detta duala bivillkor skär då bort tidigare optimum.

1f: För att få tillåten lösning måste man avrunda x_1 neråt, till 166. Målfunktionsvärdet blir då 1046, vilket blir en undre gräns. LP-optimum gav 1050, vilket är en övre gräns. Optimum kan som högst vara 4 kr bättre än den tillåtna lösningen.

Förgrening över x_1 ger P1: P0 + ($x_1 \leq 166$) och P2: P0 + ($x_1 \geq 167$). Gränserna är som sagt 1046 och 1050.

Uppgift 2

2a: Finn billigaste väg från nod 1 till nod 10, med Dijkstras metod. Nodmärkningar: 1: (0,-), 2: (5,1), 3: (7,1), 4: (12,2), 5: (12,2), 6: (14,3), 7: (18,4), 8: (19,5), 9: (18,5), 10: (25,9). Väg: 1-2-5-9-10, kostnad: 25.

2b: Använd Fords metod ty negativa kostnader och cykler. Nodmärkningar: 1: (0,-), 2: (5,1), 3: (7,1), 4: (12,2), 5: (12,2), 6: (14,3), 7: (14,8), 8: (9,5), 9: (14,8), 10: (7,8). Väg: 1-2-5-8-10, kostnad: 7.

Uppgift 3

3a: Handelsresandeproblemet. En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket får kostnaden 35. Närmaste-granne fungerar inte så bra. Det är enklare att modifiera 1-trädet. Byt båge (5,7) mot (6,7), så fås en tillåten tur, 1-3-5-4-6-7-8-2-1, med kostnad 37. Vi har alltså en övre gräns på 37 och en undre på 35, så lösningen är alltså högst 2 från optimum.

3b: Kinesiska brevbärarproblemet, men båge (6,7) behöver inte täckas. Noderna 2, 3, 4 och 8 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågarna (2,8) och (3,4). En Eulertur till detta blir t.ex. 1-3-4-5-3-6-5-7-8-2-5-8-2-1, vilken kostar $61 + 10 = 71$ (utan båge (6,7)).

3c: Billigaste uppspännande träd. Lös med Kruskals (eller Prims) metod. Träd: (1,2), (1,3), (2,8), (3,4), (4,5), (4,6), (5,7). Optimalkostnad: 30.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (2,1), (4,6), (5,1), (5,3), (6,5), (7,6) och (8,5). (Valet av båge (5,1) är inte unikt.) Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -3$, $y_4 = -17$, $y_5 = -6$, $y_6 = -13$, $y_7 = -20$, $y_8 = -13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 20 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{52} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{57} = 19 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{78} = 1 > 0$ (ej optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{82} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar utom (7,8) uppfyller optimalitetskriterierna. I båge (7,8) vill vi minska flödet, så x_{78} blir inkommande variabel, för minskning. Cykeln blir 8-7-6-5-8, och den största ändring som kan göras är 1 p.g.a. båge (8,5), så x_{85} blir utgående variabel.

Ett enda nodpris ändras, nämligen $y_8 = -12$ (resten är oförändrade) och följande reducerade kostnader ändras: $\hat{c}_{82} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{85} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller nu optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal. Kostnaden minskade med 1 ($\hat{c}_{78}$ gånger ändringens storlek).

4b: Nodpriser är $y_7 = -20$ och $y_1 = 0$, så kostnaden bör vara mindre än $y_1 - y_7 = 20$.

4c: En vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 4-6-5-1, med kapacitet 5, skicka 5. Ändra tillåtna riktningar, bågarna (4,6), (6,5) och (5,1) blir fulla.

Nästa vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 4-5-2-1, med kapacitet 3, skicka 3. Ändra tillåtna riktningar, båge (4,5) blir full.

I nästa vägsökning med Dijkstras metod kan ingen annan nod än nod 1 märkas, så minsnittet går runt nod 1, dvs. är bågarna (4,5), (4,6) och (3,4) (åt fel håll). Maxflödet är 8.

Uppgift 5

5a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 4 \le 0$, $g_2(x) = x_1 - 3 \le 0$, $g_3(x) = x_2 - 3 \le 0$, $g_4(x) = -x_1 + x_2 \le 0$, $g_5(x) = -x_1 \le 0$, $g_6(x) = -x_2 \le 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 - 20 \\ 2x_2 + x_1 - 6 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_6(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Kontroll av Hessianen visar att problemet är konvext.)

För punkt A: (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Endast bivillkor 4 är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -15 \\ -3 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_4 = -15$ och $u_4 = 3$, vilket inte kan hända samtidigt, så KKT3 saknar lösning.

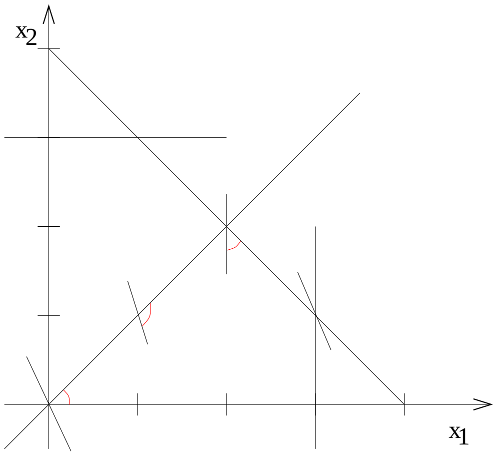
För punkt B: (2, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 - u_4 = 10$ och $u_1 + u_4 = 0$, vilket har lösningen $u_1 = 5$ och $u_4 = -5 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt C: (3, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 + u_2 = 7$ och $u_1 = 1$, vilket ger $u_2 = 6$, så $u \ge 0$ och KKT4 är uppfyllt.

För punkt D: (3, 3):
KKT1: Punkten uppfyller inte bivillkor 1, dvs. är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt.

Punkt C är optimal.

5b: För varje punkt: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren. Se röda markeringar i figuren.



Uppgift 6

Efter första steget fås $\alpha = (7, 9, 10, 11)$ och $\beta = (1, 0, 15, 15)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (8, 10, 10, 11)$ och $\beta = (1, -1, 15, 15)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{44} = 1$, och total tid blir 69.

Optimal duallösning är $\alpha = (8, 10, 10, 11)$ och $\beta = (1, -1, 15, 15)$. Summering av duallösningen ger 69, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 7

Hinkpackning. Jag använder första plats-heuristiken:
Ta med sak 1 (30 kg) tur 1, 40 kg kvar i tur 1.
Ta med sak 2 (35 kg) tur 1, 5 kg kvar i tur 1.
Sak 3 (25 kg) får inte plats i tur 1, ta med i tur 2, 45 kg kvar i tur 2.
Sak 4 (55 kg) får inte plats i tur 1 eller 2, ta med i tur 3, 15 kg kvar i tur 3.
Sak 5 (30 kg) får inte plats i tur 1, ta med i tur 2, 15 kg kvar i tur 2.
Sak 6 (10 kg) får inte plats i tur 1, ta med i tur 2, 5 kg kvar i tur 2.
Sak 7 (20 kg) får inte plats i tur 1, 2 eller 3, ta med i tur 4, 50 kg kvar i tur 4.
Sak 8 (30 kg) får inte plats i tur 1, 2 eller 3, ta med i tur 4, 20 kg kvar i tur 4.

Det räckte alltså med 4 turer. Undre gräns $\lceil 235/70 \rceil = 4$, så lösningen är optimal.