Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP86
Lösning till tentamen
2018-10-22

Lösningar

Uppgift 1

1a: KKT1: Lösningen $x_j = dr_j$ är tillåten.
$(\sum_j x_j = \sum_j dr_j = d(\sum_j r_j) = dp = m$ och $x_j = dr_j > 0$ för alla j.)
KKT2: $x_j > 0$ ger att alla multiplikatorer för bivillkoren $x_j \geq 0$ ska vara noll.
KKT3: $2(x_j - dr_j) + u = 0$ för alla j. Insättning av $x_j = dr_j$ ger $u = 0$.
KKT4 är därmed uppfyllt.
(Denna kontroll kan också göras med siffror.)

Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

1b: Antag att q partier har minst 5%, och att de fick s röster. I exemplet är $q = 4$ och $s = 93$.
Ledningen ger via KKT2 att alla multiplikatorer för bivillkoren $x_j \geq 0$ ska vara noll.
KKT3 ger $2(x_j - dr_j) + u = 0$ för alla j, vilket ger $x_j = dr_j - u/2$ för alla j.
Sätt in i bivillkor 1: $\sum_{j=1}^{q} x_j = \sum_{j=1}^{q} (dr_j - u/2) = m$, vilket ger $ds - qu/2 = m$, vilket med siffror blir $0.1 * 93 - 2u = 10$, vilket ger $u = (9.3 - 10)/2 = -0.7/2 = -0.35$.

Det ger $x_j = dr_j - u/2 = dr_j + 0.175$ för alla j. Med siffror: $x_1 = 3.3 + 0.175 = 3.475$, $x_2 = 2.9+0.175 = 3.075$, $x_3 = 2.4+0.175 = 2.575$, $x_4 = 0.7+0.175 = 0.875$. Summering av detta verifierar att summan blir 10.

Uppgift 2

2a: Vi får problemet

$$\begin{array}{lll} \max & z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} & & 21x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 16x_4 \leq 30 \\ & & x_j \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metod för att lösa LP-relaxationen: Finn $\max(c_j/a_j)$, öka x_j, fortsätt tills kappsäcken är full. Kvoter: $x_1 : 1/21$, $x_2 : 1/18$, $x_3 : 1/6$, $x_4 : 1/16$. Rangordning: x_3, x_4, x_2, x_1. (Nu betyder ju $x_j = 1$ att parti j inte ska sitta i regering, så det är inte konstigt att minst kommer först.)

P0: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 30 - 6 = 24$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 24 - 16 = 8$, $x_2 = 8/18 = 0.44$, $\hat{b} = 8 - 8 = 0$, kappsäcken full, sätt $x_1 = 0$. Detta ger LP-lösningen $(0, 0.44, 1, 1)$ med $z = 2.44$, vilket ger $\bar{z} = 2$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + $(x_2 \leq 0)$, P2 = P0 + $(x_2 \geq 1)$.
P1: Som för P0, men $x_2 = 0$, vilket ger $x_1 = 8/21 \approx 0.38$, och $z = 2.38$, vilket inte förbättrar $\bar{z}$.

Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Förgreningen ger $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$, så lösningen blir $x_3 = 1$ och $x_4 = 1$ (kappsäcken blir inte full), med $z = 2$. Lösningen är heltalig, vilket ger $\underline{z} = 2$.
Både P4 och P2 har $\bar{z} = 2$, så ingen av dem kan ge bättre lösning, och båda grenarna kapas.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, med $z = 2$.
Svar i ord: Tant Gredelin (parti 3) och Farbror Blå (parti 4) ska inte sitta i regeringen. Två partier ingår i regeringen.

2b: En minimal övertäckning är $\{2, 4\}$ (eftersom $18 + 16 = 34 > 30$), vilket ger $x_2 + x_4 \leq 1$, vilket i ord betyder att parti 2 och 4 inte båda ska vara utanför regeringen.

2c: Nya bivillkor: $x_1 - x_3 + x_4 \leq 1$, $x_2 + x_4 \leq 1$, $x_3 \leq x_2$.

2d: Bivillkor:

$$21x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 16x_4 \geq 31 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad (2)$$
$$x_1 - x_3 + x_4 \leq 1 \quad (3)$$
$$x_2 + x_4 \leq 1 \quad (4)$$
$$x_3 \leq x_2 \quad (5)$$

Första rundan ger inget, förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 = 0$), P2 = P0 + ($x_1 = 1$).
P1: $x_1 = 0$: (1) ger $x_2 = 1$ och $x_4 = 1$, (4) ej uppfyllt. P1 gav ingen tillåten lösning. Kapa grenen.
P2: $x_1 = 1$: (2) ger $x_2 = 0$, (5) ger $x_3 = 0$, (1) ger $x_4 = 1$, (3) ej uppfyllt. P2 gav ingen tillåten lösning. Kapa grenen.
Trädet avsökt. Ingen tillåten lösning funnen. (Det blir ingen regering.)

Uppgift 3

3a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	-1	-4	-2	0	0	0	0
x_5	0	1	1	1	1	1	0	0	60
x_6	0	2	0	3	0	0	1	0	50
x_7	0	1	4	1	1	0	0	1	40

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-1	7/2	-2	0	5/2	0	125
x_5	0	0	1	-1/2	1	1	-1/2	0	35
x_1	0	1	0	3/2	0	0	1/2	0	25
x_7	0	0	4	-1/2	1	0	-1/2	1	15

Sedan fås x_4 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	7	5/2	0	0	3/2	2	155
x_5	0	0	-3	0	0	1	0	-1	20
x_1	0	1	0	3/2	0	0	1/2	0	25
x_4	0	0	4	-1/2	1	0	-1/2	1	15

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 15$, (samt $x_5 = 20$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $v = 155$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva. Bivillkor 1 är inte aktivt, dvs. man använder inte alla personer. Den begränsande faktorn är alltså inte antalet personer utan deras begränsade skicklighet. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$, $y_3 = 2$, $v = 155$. Svar i ord: Använd 25 personer till att knacka dörr och 15 personer till valstugor.

3b: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_3 = 2$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 3. (Även bivillkor 2 vore bra att öka högerledet för, $y_2 = 1.5$, medan fler personer inte hjälper, $y_1 = 0$.)

3c: Reducerad kostnad: $\hat{c}_2 = c_2 - a_2^T y$. Vi har $c_2 = 1$, $a_2^T = (1, 0, a_{32})$ och $y = (0, 3/2, 2)$, så $\hat{c}_4 = 1 - 2a_{32}$. Vi får $\hat{c}_2 > 0$ om $1 - 2a_{32} > 0$, dvs. $a_{32} < 1/2$.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (1,5), (2,5), (2,6) och (3,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 19$, $y_4 = 35$, $y_5 = 16$, $y_6 = 27$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 22 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{56} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Lösningen är optimal.

4b: Nu fås $\hat{c}_{64} = 8 + 27 - 35 = 0$. Optimallösningen ej ändrad.
(Man skulle kunna välja x_{64} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 6-4-3-1-5-2-6, och maximal ändring blir 5 p.g.a. båge (3,4). Båge (3,4) blir då utgående. Nu får vi samma nodpriser som förut, och samma reducerade kostnader, förutom att (6,4) nu är basbåge och $\hat{c}_{34} = 0$ (optimalt). Kostnaden är dock oförändrad.)

Uppgift 5

5a: Handelsresandeproblem. Närmaste granne med start i nod 3 ger turen 3-5-1-2-6-4-3, med kostnaden 82. Billigaste 1-träd ger kostnad 68, så vi får övre gräns 82 och undre gräns 68.

Bivillkor: $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} = 2$ (rätt valens för nod 5) eller $x_{12} + x_{25} + x_{15} \leq 2$ (förbjud liten cykel 1-2-5-1).

5b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 3, 4 och 5 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1,5) och (3,4), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 26. En rundtur blir då t.ex. 1-2-5-6-4-3-4-5-3-1-5-1 med kostnaden $116 + 26 = 142$.

Uppgift 6

Använd Fords metod. Vi får vägen 1-4-7-3-5-8 med kostnad 5.

Uppgift 7

Finn maxflöde från nod 1 till nod 9. Minsnittet ger då de gator som har begränsar flödet, och borde göras färdigt snabbt. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-5-6-9, med kapacitet 11. Skicka 11 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2,5) och (5,6) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-3-4-7-9, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,3) och (4,7) blir fulla.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1, 2, 3, 4 och 5, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (4,7) och (5,6) (samt (7,3) baklänges). Maxflödet är 20.

Uppgift 8

8a: Vi söker en maximal oberoende nodmängd, dvs. den största mängd noder som inte har någon båge mellan sig. I detta fall fås 13 st. (Det är viktigt att inte välja nod 5 och 12.)

8b: Vi söker den största klicken, eftersom alla noder i en klick måste tillhöra olika grupper. Här ges den av noderna 6, 8 och 19, så med tre arbetsgrupper kan alla tas med.

8c: Exempelvis grupp 1: 1, 15, 16, 18, grupp 2: 2, 4, 8, 13, grupp 3: 3, 5, 12, 19, grupp 4: 6, 7, 10, 14. (Här har vi varit extra försiktiga och inte tagit med två från samma sammanhängade komponent i samma grupp, vilket egentligen är onödigt.)

Uppgift 9

Efter första steget fås $\alpha = (0, 4, 7, 0, 1)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3, 4 och 5 samt kolumn 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1, 5, 7, 0, 1)$ och $\beta = (0, 0, 0, -1, 0)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{14} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 13. Optimal duallösning är ovanstående. Summering av duallösningen ger 13, så starka dualsatsen är uppfylld.