Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP86
Lösning till tentamen
2019-10-21

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	-4	-4	-4	0	0	0	0
x_5	0	1	2	0	0	1	0	0	10
x_6	0	1	2	0	2	0	1	0	8
x_7	0	2	0	4	2	0	0	1	8

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-4	6	1	0	0	5/2	20
x_5	0	0	2	-2	-1	1	0	-1/2	6
x_6	0	0	2	-2	1	0	1	-1/2	4
x_1	0	1	0	2	1	0	0	1/2	4

Sedan fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	2	3	0	2	3/2	28
x_5	0	0	0	0	-2	1	-1	0	2
x_2	0	0	1	-1	1/2	0	1/2	-1/4	2
x_1	0	1	0	2	1	0	0	1/2	4

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 2$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $z = 28$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva, så det blir inga gröna eller gula över. Det blir dock 20 röda över (ty $x_5 = 2$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1.5$, $v = 28$.
Svar i ord: Gör 4 påsar av sort 1 och 2 påsar av sort 2.

1b: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_2 = 2$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 2, dvs. köpa fler gröna.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - (1.5y_1 + 1.5y_2 + 1.0y_3) = c_8 - 4.5 > 0$ om $c_8 > 4.5$. Vinsten behöver vara större än 4.5. Eftersom $y_1 = 0$ spelar värdet på a_{81} ingen roll.

1d: Dualt bivillkor: $1.5y_1 + 1.5y_2 + 1.0y_3 \geq c_8$. Sätt in $y = (0, 2, 1.5)$, vilket ger $4.5 \geq c_8$. Så duallösningen är tillåten om $c_8 \leq 4.5$. Eftersom vi vill ha x_8 som inkommande variabel, ska primala lösningen inte vara optimal, dvs. duala lösningen ska inte vara tillåten, så vi kräver $c_8 > 4.5$.

Uppgift 2

Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (linjära funktioner och kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

2a: Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_2 - 0.4 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 4 \\ 4x_2 - 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Fall 1: $g_1(x) = 0$ och $g_2(x) = 0$. Detta ger punkten $x_1 = 0.6$ och $x_2 = 0.4$.
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 = -0.8$ och $u_2 = 1.2$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Fall 2: $g_2(x) = 0$, samt $g_1(x) < 0$, $g_3(x) < 0$ och $g_4(x) < 0$.
KKT2: Bivillkor 1, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 8x_1 - 4 \\ 4x_2 - 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $x_1 = (4 - u_2)/8$ och $x_2 = (2 - u_2)/4$.
Nu använder vi $g_2(x) = 0$, dvs. $x_1 + x_2 = 1$ för att få u. Detta ger $(4-u_2)/8 + (2-u_2)/4 = 1$, vilket ger $u_2 = 0$.
Detta ger $x_1 = 0.5$ och $x_2 = 0.5$.
Nu blir dock $g_1(x) = 0.1 > 0$, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Fall 3: $g_1(x) = 0$, samt $g_2(x) < 0$, $g_3(x) < 0$ och $g_4(x) < 0$.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 8x_1 - 4 \\ 4x_2 - 2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $x_1 = 0.5$ och $x_2 = (2 - u_1)/4$.
Nu använder vi $g_1(x) = 0$, dvs. $x_2 = 0.4$ för att få u. Vi får $u_1 = 0.4$.
KKT1: Kontroll av antagandet: $g_2(x) = -0.1 < 0$, $g_3(x) = -0.6 < 0$ och $g_4(x) = -0.4 < 0$. KKT1 uppfyllt.
KKT4: $u \geq 0$, uppfyllt.

Punkten (0.5, 0.4) är en KKT-punkt, och optimal, eftersom problemet är konvext.

Uppgift 3

3a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 8$, $p_2 = 1$, $y_3 = 5$, $p_3 = 1$, $y_4 = 8$, $p_4 = 1$, $y_5 = 11$, $p_5 = 3$, $y_6 = 10$, $p_6 = 3$, $y_7 = 15$, $p_7 = 2$, $y_8 = 15$, $p_8 = 6$, $y_9 = 16$, $p_7 = 5$, Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 5 - 9, med kostnad 16.

3b: Använd nodmärkningarna i uppgift a. Uppnystning från nod 8 ger vägen 1 - 3 - 6

- 8, med kostnad 15.

Uppgift 4

Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-6-7-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1, 5), (5, 6) och (6, 7) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-3-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2, 3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-6-3-7-4, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2, 6) och (7, 5) blir fulla.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1 och 2, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (1, 5), (2, 3), (2, 6) och (5, 2) baklänges. Maxflödet är 9.

Öka kapciteten på båge (1, 5), (2, 3) eller (2, 6), eftersom de ingår i minsnittet.

Uppgift 5

5a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 20/9 \approx 2.22$ och $z = 100/9 \approx 11.1$, vilket ger $\bar{z} = 11$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2/7$, $x_2 = 2$, $z = 76/7 \approx 10.86$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 10$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 10$. Kapa.
P4: Kapa, ty $\bar{z} = 10$ och $\underline{z} = 10$.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Svar: Installera 2 apparater av sort 2. Målfunktionsvärde 10.

5b: Finn vilken bättre heltalspunkt som först blir tillåten när högerledet ökas, dvs. bivillkoren parallellflyttas utåt. Numeriskt kan man kolla relevanta punker på följande sätt: Punkt (0, 2), $z = 10$, vänsterled=18, gamla optimum.
Punkt (3, 0), $z = 9$, vänsterled=21, sämre.
Punkt (2, 1), $z = 11$, vänsterled=23, bättre.
Punkt (1, 2), $z = 13$, vänsterled=25, bättre.
Punkt (0, 3), $z = 15$, vänsterled=27, bättre.
Slutsats: Första bättre punkten är (2, 1) blir tillåten vid högerledet/budgeten 23.

Uppgift 6

6a: Inför ny nod 7, sänka av styrka 1, samt bågar (4,7) och (5,7), båda med kostnad noll. (I startlösningen är $x_{57} = 1$.)

6b: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (2, 1), (4, 3), (5, 3), (5, 6) och (6, 2) (samt (5,7)). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -7$, $y_4 = -11$, $y_5 = -12$, $y_6 = -8$, (och $y_7 = -12$) och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{31} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{32} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{63} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), (samt $\hat{c}_{47} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$)). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

6c: Nya reducerade kostnader: $\hat{c}_{54} = 2 + y_5 - y_4 = 1 > 0$, fortfarande optimalt.

$\hat{c}_{32} = 2 + y_3 - y_2 = -1 < 0$, ej optimalt. Öka.
Alltså välj x_{32} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 3-2-6-5-3, och maximal ändring blir 3, pga. båge (6,2), som blir utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -6$, $y_4 = -10$, $y_5 = -11$, $y_6 = -7$, (och $y_7 = -11$) och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{62} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{31} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{63} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), (samt $\hat{c}_{57} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$)). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

Uppgift 7

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1, 3) och (3, 6), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 9. En rundtur blir då t.ex. 1-8-6-3-1-3-6-5-3-4-5-7-4-2-1, med kostnaden $63 + 9 = 72$.

Uppgift 8

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 36, vilket är en undre gräns. Närmaste granne med start i nod 1 ger turen 1-8-6-7-5-3-4-2-1 med kostnad 41. Vi får övre gräns 41 och undre gräns 36, så vår lösning kan vara 5 enheter sämre än optimum, men inte mer.

I 1-trädet har nod 4 valens 3, så ett bivillkor som specificerar att nod 4 ska ha valens 2 skär bort den relaxerade lösningen men inte någon tillåten lösning: $x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{46} = 2$.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 6, 7, 4, 5)$ och $\beta = (0, 1, 0, 2, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 samt kolumn 1, 2 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (6, 7, 7, 5, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 2, 1)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{11} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir 32. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 32, så starka dualsatsen är uppfylld.

9b: Om alla kostnader i kolumn 4 ökar med 3, kan en optimal dual lösning fås genom att öka β_4 med 3. För övrigt är resten av duallösningen oförändrad. Eftersom precis samma reducerade kostnader fås, ändras inte den primala lösningen. (Man kan också motivera detta med att alla tillåtna lösningar blir precis 3 dyrare.)

Uppgift 10

10a: Maximal matching, sök utökande (alternerande) väg. Först kan (8,10) matchas. Därefter finner man den utökande vägen 2-1-9-7-6-4. Byte av matchningen längs den ger en maximal matching där alla är med, (1,2), (3,5), (4,6), (7,9) och (8,10).

10b: Då blir matchningen tudelad, dvs. ett tillordningsproblem, och ungerska metoden kan användas.