Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP89
Lösning till tentamen
2024-01-03

Lösningar

Uppgift 1

1a: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & v = & 20y_1 & + & 7y_2 & + & 8y_3 & + & 9y_4 & & & \\
\text{då} & & 5y_1 & & & & & & & \leq & 14 & (1) \\
& & & & 2y_2 & + & 10y_3 & + & 5y_4 & \leq & 20 & (2) \\
& & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & + & 3y_4 & \leq & 18 & (3) \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

1b: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\hat{b}$
v	1	-20	-7	-8	-9	0	0	0	0
y_5	0	5	0	0	0	1	0	0	14
y_6	0	0	2	10	5	0	1	0	20
y_7	0	3	3	3	3	0	0	1	18

Först fås y_1 som inkommande variabel och y_5 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\hat{b}$
v	1	0	-7	-8	-9	4	0	0	56
y_1	0	1	0	0	0	1/5	0	0	14/5=2.8
y_6	0	0	2	10	5	0	1	0	20
y_7	0	0	3	3	3	-3/5	0	1	48/5=9.6

Därefter fås y_4 som inkommande variabel och y_7 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\hat{b}$
v	1	0	2	1	0	2.2	0	3	424/5=84.8
y_1	0	1	0	0	0	1/5	0	0	14/5=2.8
y_6	0	0	-3	5	0	1	1	-5/3	4
y_4	0	0	1	1	1	-1/5	0	1/3	16/5=3.2

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $y_1 = 2.8$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 3.2$, $y_5 = 0$, $y_6 = 4$ med $v = 84.8$.

Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 1 och 3 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Primallösningen (dualen av dualen) läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, $x_1 = 2.2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $z = 84.8$.

Eftersom y_1 och y_4 är större än noll, är primala bivillkor 1 och 4 aktiva.

Svar i ord: Han ska köpa 2.2 förpackningar av typ 1 och 3 av typ 3. Kostnaden blir 84.8. Av röda kulor och änglar köps precis så mycket som efterfrågas. Det blir lite mer än behovet av istappar och garntomtar.

1c: Priserna är högerled i dualen. Dualvariabler till dualen är x, och x_3 har det största värdet. En prisökning på förpackning 3 skulle ge störst kostnadsökning.

1d: Ny variabel (i primalen) x_4. Reducerad kostnad: $\hat{c}_4 = c_4 - a_4^T y =$ $12 - (2, 0, 3, 2)^T (2.8, 0, 0, 3.2) = 12 - 5.6 - 6.4 = 0$. Svar nej, det skulle inte förbättra lösningen. (Men man kunde få en annan lösning med samma målfunktionsvärde.)

Uppgift 2

2a: Alternativ 1: Inför en ny nod, 8, dit överskottet (det som inte skickas iväg) fiktivt skickas, med sänkstyrka 5, samt två nya bågar till nod 8 med kostnad noll, en från nod 1 och en från nod 2. (Detta motsvarar slackvariabler.)

Alternativ 2: Inför en ny nod, 8, som är superkälla, med källstyrka 12 (lika med den totala sänkstyrkan), samt två nya bågar från nod 8 med kostnad noll, en till nod 1 med kapacitet 10 och en till nod 2 med kapacitet 7.

2b: Alternativ 1: Sätt $x_{28} = 5$ för att få ett tillåtet flöde. Basbågarna blir (1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (3,6), (4,7) samt (2,8). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 8$, $y_4 = 5$, $y_5 = 14$, $y_6 = 16$, $y_7 = 12$, $y_8 = 7$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{13} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{18} = -7 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Välj x_{18} som inkommande, att öka. Cykeln blir 1-8-2-1, och maximal ändring blir 1. Det ger båge (1,2) som utgående.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 5$, $y_5 = 7$, $y_6 = 9$, $y_7 = 12$, $y_8 = 0$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{13} = 6 > 0$ (ej optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{23} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = -6 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Välj x_{13} som inkommande, att minska. Cykeln blir 3-1-8-2-5-3, och maximal ändring blir 2. Det ger båge (3,5) som utgående.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 7$, $y_4 = 5$, $y_5 = 7$, $y_6 = 15$, $y_7 = 12$, $y_8 = 0$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Välj x_{56} som inkommande, att öka. Cykeln blir 5-6-3-1-8-2-5, och maximal ändring blir 1. Det ger båge (2,5) som utgående (på sin övre gräns).

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 7$, $y_4 = 5$, $y_5 = 8$, $y_6 = 15$, $y_7 = 12$, $y_8 = 0$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$).

Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden är 130.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får (t.ex.) vägen 1-3-6, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,3) och (3,6) blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen (t.ex.) 1-2-5-6, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar i vägen blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-4-7-6, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar i vägen blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,2), (1,3) och (1,4). Maxflödet är 18.

Uppgift 3

3a: Bivillkoren $x_1 \leq 1$ och $x_2 \leq 1$ är redundanta på grund av bivillkor $x_1 + x_2 \leq 1$, och kan tas bort. Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 10 \\ 8x_2 - 20 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -10 \\ -20 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -10$ och $u_2 = -20$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -10 \\ -12 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 2$ och $u_3 = 12$. KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ -20 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_2 = -14$ och $u_3 = 6$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Antag nu att inga bivillkor är aktiva.
KKT2: Inga bivillkor är aktiva: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

KKT4 blir då uppfyllt.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4x_1 - 10 \\ 8x_2 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $x_1 = 2.5$ och $x_2 = 2.5$. Men den punkten uppfyller inte bivillkor 3, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att punkt (0, 1) är optimal.

3b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
$\min z = -10d_1 - 20d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -30$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 0.5. Mimimum längs denna linje ger $t = 2.5$, så vi får $t = 0.5$, vilket ger $x^{(2)} = (0.5, 0.5)$.

Nu är bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$\min z = -8d_1 - 16d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -8$. Sätt $x^{(2)} = (0.5 - t, 0.5 + t)$. Maximal steglängd blir 0.5. Mimimum längs denna linje ger $t \approx 0.67$, så vi får $t = 0.5$, vilket ger $x^{(3)} = (0, 1)$.

Nu är bivillkor 1 och 3 aktiva. LP-problemet blir
$\min z = -10d_1 - 12d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_1 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (0, 1)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1} 2x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + u(x_1 + x_2 - 1) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 10)x_1 + (u - 20)x_2 - u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $4x_1 + u - 10 = 0$ och $8x_2 + u - 20 = 0$, dvs. $x_1 = (10 - u)/4$ och $x_2 = (20 - u)/8$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 1$ och $0 \leq x_2 \leq 1$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$, med $\varphi(0) = -24$. Undre gräns: -24. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 10$ får vi $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$, med $\varphi(1) = -16$. Undre gräns ökar till -16. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -16.

För $u = 20$ får vi $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$, med $\varphi(2) = -20$. Undre gräns ökar inte. Punkten är tillåten, men ger ingen bättre övre gräns.

Vi får bästa undre gräns -16 och övre gräns -16, så lösningen (0, 1) är optimal. Den fås för $u = 10$, vilket är ett optimalt värdet på u.

3d: För $u \leq 6$ fås $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$, vilket ger $x_1 + x_2 = 1$, vilket inte är tillåtet.
För $6 \leq u \leq 10$ fås $x_1 = (10 - u)/4$ och $x_2 = 1$, vilket ger $x_1 + x_2 = (14 - u)/4$, vilket är tillåtet för $u = 10$.
För $10 \leq u \leq 12$ fås $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$, vilket ger $x_1 + x_2 = 1$, vilket är tillåtet.

För $12 \leq u \leq 20$ fås $x_1 = 0$ och $x_2 = (20-u)/8$, vilket ger $x_1 + x_2 = (20-u)/8$, vilket är tillåtet för $u = 12$.
För $u \geq 20$ fås $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$, vilket ger $x_1 + x_2 = 0$, vilket inte uppfyller komplementaritetsvillkoren eftersom $u > 0$.

Alltså fås den optimala x-lösningen för alla u mellan 10 och 12.

Uppgift 4

4a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om mormor ska få sak j, 0 om inte.

Målfunktion: Maximera värdet för mormor: max $5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 3x_5$

Bivillkor:
Kostnaden för Laisa: $7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 15$
Högst två saker: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$
Minst fyra saker: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 4$
Inte både godis och lussebullar: $x_2 + x_4 \leq 1$
Inte både akvarellmålning och lussebullar: $x_1 + x_4 \leq 1$
Minst en av godiset, likören och bullarna: $x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$

Modell:

$$
\begin{array}{llrrrrrcrr}
\max & z = & 5x_1 & +4x_2 & +8x_3 & +5x_4 & +3x_5 & & & \\
\text{då} & & 7x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +6x_4 & & \leq & 15 & (1) \\
& & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq & 2 & (2) \\
& & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & \geq & 4 & (3) \\
& & & x_2 & & +x_4 & & \leq & 1 & (4) \\
& & x_1 & & & +x_4 & & \leq & 1 & (5) \\
& & & x_2 & +x_3 & +x_4 & & \geq & 1 & (6) \\
& & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & 0,1 &
\end{array}
$$

4b: Balas metod:
$VL_0 = -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 5x_4 - 3x_5 \leq 0$
$VL_1 = 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 15 \leq 0$
$VL_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2 \leq 0$
$VL_3 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 4 \leq 0$
$VL_4 = x_2 + x_4 - 1 \leq 0$
$VL_5 = x_1 + x_4 - 1 \leq 0$
$VL_6 = -x_2 - x_3 - x_4 + 1 \leq 0$

Först fås inga fixeringar, så vi förgrenar över x_1.
P1 = P0 +($x_1 = 1$). P2 = P0 +($x_1 = 0$).

P1 ($x_1 = 1$): $\underline{VL}_5 = 0$, så vi måste fixera $x_4 = 0$.
Vi får inga fler fixeringar, så vi förgrenar över x_2.
P3 = P1 +($x_2 = 1$). P4 = P1 +($x_2 = 0$).

P3 ($x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_4 = 0$): $\underline{VL}_1 = -2$, så vi måste fixera $x_3 = 0$.
Vi får inga fler fixeringar, så vi förgrenar över x_5.
P5 = P3 +($x_5 = 1$). P6 = P3 +($x_5 = 0$).

P5 ($x_5 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_4 = 0$): Alla variablerna fixerade, och en kontroll visar att lösningen är tillåten i samtliga bivillkor. Vi noterar lösningen $x = (1, 1, 0, 0, 1)$ med $z = 12$ som kandidatlösning, kapar grenen, och uppdaterar målfunktionsbivillkoret till: $VL_0 = -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 13 \leq 0$

P6 ($x_5 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_4 = 0$): Alla variablerna fixerade, men $VL_0 = 4$, så vi kapar grenen.

Backa tillbaka: P4 ($x_2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_4 = 0$): $\underline{VL}_0 = 2$, så vi måste kapa grenen.

Backa tillbaka: P2 ($x_1 = 0$): $\underline{VL}_0 = -7$, så vi måste fixera $x_3 = 1$.
Vi får inga fler fixeringar, så vi förgrenar över x_2.
P7 = P2 +($x_2 = 1$). P8 = P2 +($x_2 = 0$).

P7 ($x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $x_3 = 1$): $\underline{VL}_4 = 0$, så vi måste fixera $x_4 = 0$. $\underline{VL}_1 = -2$, så vi måste fixera $x_5 = 1$.
Vi får inga fler fixeringar, så vi förgrenar över x_5.
P9 = P7 +($x_5 = 1$). P10 = P7 +($x_5 = 0$).

P9 ($x_5 = 1$, $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$): Alla variablerna fixerade, och en kontroll visar att lösningen är tillåten i samtliga bivillkor. Vi noterar lösningen $x = (0, 1, 1, 0, 1)$ med $z = 15$ som kandidatlösning, kapar grenen, och uppdaterar målfunktionsbivillkoret till: $VL_0 = -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 16 \leq 0$

P10 ($x_5 = 0$, $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$): Alla variablerna fixerade, men $VL_0 = 4$, så vi kapar grenen.

Backa: P8 ($x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_3 = 1$): $\underline{VL}_0 = 0$, så vi måste fixera $x_4 = 1$ och $x_5 = 1$. Alla variablerna fixerade, och en kontroll visar att lösningen är tillåten i samtliga bivillkor. Vi noterar lösningen $x = (0, 0, 1, 1, 1)$ med $z = 16$ som kandidatlösning, kapar grenen, och uppdaterar målfunktionsbivillkoret till: $VL_0 = -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 17 \leq 0$

Alla grenar är nu avsökta, och problemet löst. Den senast noterade lösningen är optimal: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, med $z = 16$. Svar i ord: Lasia ska ge mormor sak 3, 4 och 5, dvs. likör, lussebullar och kram, vilket ger värde 16 för mormor.

Uppgift 5

5a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 46. En heuristik kan ge turen 1-2-3-7-4-6-5-1, med kostnaden 49. Lösningen är alltså maximalt 3 enheter dyrare än optimum.

5b: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Alla noder utom nod 4 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (1,2), (3,7) och (5,6), med kostnad 21. (Det enda rimliga alternativet (1,5), (2,3) och (6,7) kostar 22.) Vi löser nu problemet genom att dubblera ovanstående bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 109. En optimal tur är t.ex. 1-2-3-7-6-5-1-4-5-6-4-7-3-4-2-1. (Många andra optimala turer finns.)

5c: Finn billigaste väg med Dijkstras metod. Tillåt valfri riktning på alla bågar. Billigaste väg: 1-4-7. Kostnad: 12.

Uppgift 6

Den gamles förslag, finn minsta tillåtna x_1 med $x_2 = 0$: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 15$. Verifiering av att den är tillåten ger övre gränsen $\bar{z} = 15$.

P0: LP-optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 2.5$, $z = 12.5$. Detta ger $\underline{z} = 13$. (Dvs. vi kan kanske få något bättre än $\bar{z} = 15$.)

Vi förgrenar över x_1. P1 = P0 $+(x_1 \leq 2)$. P2 = P0 $+(x_1 \geq 3)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 3.333$, $z = 12.667$, vilket ger $\underline{z} = 13$.

Förgrena över x_2. P3 = P1 $+(x_2 \leq 3)$. P4 = P1 $+(x_2 \geq 4)$.

P3: LP-problemet saknar tillåten lösning. Kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 1.6$, $x_2 = 4$, $z = 12.8$, vilket ger ger $\underline{z} = 13$.

Förgrena över x_1. P5 = P4 $+(x_1 \leq 1)$. P6 = P4 $+(x_1 \geq 2)$.

P5: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $z = 13$, vilket är en tillåten heltalslösning, och ger $\bar{z} = 13$.

Denna övre gräns sammanfaller med den undre gränsen i P0, så vi kapar alla grenar under P0. (Dvs. vi behöver inte lösa P6 och P2.)

Trädet är avsökt. Optimum är $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ med $z = 13$. I ord: Hyr en bil av typ 1 och 5 bilar av typ 2, till kostnaden 13.

Om man istället skulle gå ner i P2 först:

P2: LP-optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 13$, vilket ger $\underline{z} = 13$. Vi kan direkt kapa denna gren, samt P1-grenen, och har funnit optimum. (Optimallösningen är alltså inte unik.)

Uppgift 7

Efter första steget fås $\alpha = (5, 6, 8, 7, 5)$ och $\beta = (0, 6, 1, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2, 3 och 4 samt kolumn 4. Minsta ostrukna element är 1.

Vi får nu $\alpha = (6, 6, 8, 7, 6)$ och $\beta = (0, 6, 1, -1, 1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får t.ex. lösningen $x_{15} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 40. Optimal duallösning är $\alpha = (6, 6, 8, 7, 6)$ och $\beta = (0, 6, 1, -1, 1)$. Summering av duallösningen ger 40, så starka dualsatsen är uppfylld.