Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	16 mars 2010
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Kaj Holmberg: *Introduktion till olinjär optimering.*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

En småskalig biltillverkare kan sälja upp till 4 stycken Spajker SAAB under två år. Av bilen Spajker Super Sport kan tillverkaren sälja allt han kan producera. Av 20 tillgängliga produktionsmånader tar Spajker SAAB en månad/bil och Spajker Super Sport 10 månader/bil i anspråk. Vinsten för Spajker Super Sport är 5 gånger större är för Spajker SAAB. Problemet hur tillverkaren ska planera sin produktion för att kortsiktigt maximera vinsten kan formuleras som följer.
Variabeldefinition:

x_1 = antal tillverkade Spajker SAAB,
x_2 = antal tillverkade Spajker Super Sport.

Modell:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z = x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & + & 10x_2 & \leq 20 & (1) \\
& x_1 & & & \leq 4 & (2) \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0, \text{ heltal} &
\end{array}
\qquad \text{(P1)}
$$

a) Lös heltalsproblemet P1 med en optimerande trädsökningsmetod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

b) Hur förändras optimallösningen i uppgift a om man skulle kunna sälja 100 Spajker SAAB under de två åren? (1p)

c) Konstruera grafiskt det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna till P1. Skriv upp de bivillkor som är fasetter till det konvexa höljet. (Ledning: Gradienten, dvs. normalen, till ett bivillkor kan hjälpa till.) (1p)

d) Lös LP-relaxationen till P1 med simplexmetoden. Ange optimala skuggpriser samt ge en ekonomisk tolkning av dem. (3p)

e) Formulera LP-dualen till LP-relaxationen av P1, och lös den grafiskt. Kontrollera att komplementaritet gäller med lösningen i uppgift d. (3p)

f) För vilka värden på högerledet i bivillkor 2 (gällande antal sålda Spajker SAAB) är den optimala baslösningen i uppgift d oförändrad? För vilka värden på högerledet i bivillkor 2 är den optimala lösningen i uppgift a oförändrad? (2p)

g) Man utvecklar en ny bil, Spajker Phew (plugin hybrid electric wagon), som kräver 5 produktionsmånader per bil, ger en vinst som är tre gånger större än för en Spajker SAAB, och kan säljas i obegränsat antal. Förändras optimallösningen till LP-relaxationen av P1 (i uppgift d) av detta? (1p)

h) Skulle möjligheten att tillverka Spajker Phew (se uppgift g) förändra optimallösningen till heltalsproblemet P1? (Ledning: Använd problemets kappsäcksstruktur och lämplig reduktionstest.) (1p)

Uppgift 2

a) Företaget Sjöbjörn AB ska planera sin produktion av båten Sea Aqua Bare Bear över 4 månader. Man har beställningar som ger att man kommer att sälja en SABB i slutet av varje månad. Man kan tillverka en eller två SABB per månad, och om man tillverkar två på en gång uppstår vissa kostnadsfördelar. Det kostar 600 tkr att tillverka en SABB och 800 tkr att tillverka två under en månad. Det kostar 200 tkr att lagerhålla en SABB mellan två månader.

Man har ingen båt i lager innan första perioden, och önskar heller inte ha någon i lager efter de fyra perioderna. Finn optimal produktion och lagerhållning med Dynamisk Programmering. (Ledning: Addera lagerhållningskostnaderna till produktionskostnaderna för efterföljande period.) (3p)

b) Förändras optimallösningen om produktionskostnaden under månad 4 halveras? (Lös inte om problemet från början.) (1p)

Uppgift 3

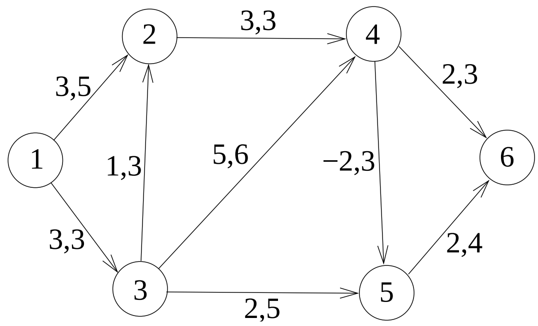
Företaget Svensk Flygplanskonstruktion AB beaktar utsläppet som ges av två miljöfarliga kemikalier från motorn SFAB2000. Utsläppet kan påverkas genom att förändra proportionerna av kemikalierna. Om x_1 och x_2 står för mängden av de två kemikalierna som används, så ges den negativa kombinerade miljöeffekten, vilken man vill minimera, av funktionen $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - x_2$. Som bivillkor finns dels vissa lagkrav, vilka tillsammans ger bivillkoret $2x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, och dels motorns funktion, som kräver $x_1 + x_2 \geq 1$. (Man kan notera att dessa bivillkor tillsammans automatiskt ger $0 \leq x \leq 1$.)

a) Avgör om någon av punkterna $(1, 0)$ och $(0, 1)$ är optimal, dvs. om det är optimalt att bara använda en av kemikalierna. (Ledning: Använd KKT-villkoren.) (2p)

b) Antag att det första bivillkoret inte är aktivt och att det andra är aktivt (dvs. att lagkravet automatiskt blir uppfyllt, men att motorns funktion måste tas hänsyn till). Finns det någon KKT-punkt under det antagandet, och är den i så fall optimal? (3p)

Uppgift 4

Betrakta nedanstående riktade graf med bågkostnader och bågkapaciteter. (Varje båge har undre gräns noll.)



a) Finn en billigaste väg från nod 1 till nod 6. Ange metod. (2p)

b) Vad får en ny båge från nod 2 till nod 5 högst kosta om den ska ingå i en billigaste väg från nod 1 till nod 6? (Lös inte om problemet.) (1p)

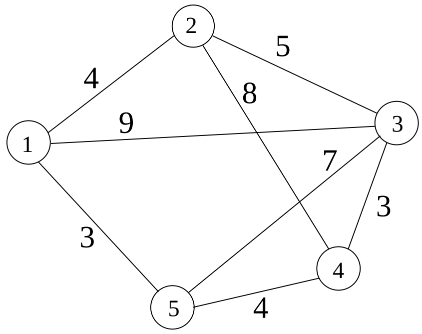
c) Betrakta det minkostnadsflödesproblem som fås om man ska skicka 6 enheter från nod 1 till nod 6. Starta med lösningen att skicka tre enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6 och tre enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6. Finn optimalt flöde med simplexmetoden i nätverk. (Tips: Ta bl.a. med båge (1, 3) och (4, 6) i startbasen.) (3p)

d) Betrakta problemet att skicka maximalt flöde från nod 1 till nod 6. Starta med lösningen att skicka tre enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6 och tre enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6. Finn maxflöde och ange minsnitt.

Antag att man får *vända* riktningen på en båge, dvs. byta roller på start- och slutnod för bågen. Vilken båge vore det mest värdefullt att vända, för att maximera flödet från nod 1 till nod 6? Gör denna ändring och finn nya maxflödet. (Starta från tidigare maxflöde.) (3p)

Uppgift 5

Betrakta nedanstående oriktade graf med bågkostnader.



a) Finn billigaste uppspännande träd i grafen. Ange metod. (1p)

b) Antag att man vill finna billigaste handelsresandetur. Finn billigaste 1-träd och ange vilken information detta ger avseende handelsresandeturen. (1p)

c) Finn en billigaste brevbärartur i grafen. (2p)

d) Finn en oberoende nodmängd med två noder i grafen. Finns det mer än en? (1p)

e) Finn en nodfärgning med minimalt antal färger i grafen. (Unyttja gärna resultatet i uppgift d.) (1p)

f) Rita upp grafens komplement och finn en bågfärgning med minimalt antal färger i den. (1p)