Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	11 juni 2010
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Kaj Holmberg: *Introduktion till olinjär optimering.*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta nedanstående heltalsproblem.

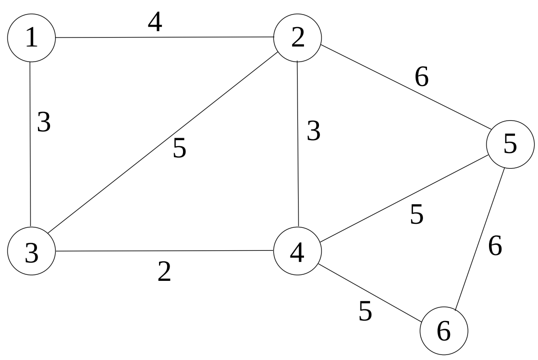
$$\begin{array}{llrcrcl} \min & z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3 \\ & & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 7 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal} \end{array}$$

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Ange alla undre och övre gränser på det optimala målfunktionsvärdet som erhålls under algoritmens gång. (3p)

a) Studera problemet ovan grafiskt och ta fram det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna. Ange en minimal mängd bivillkor som tillsammans definierar det konvexa höljet. (1p)

Uppgift 2

Nedanstående nätverk föreställer vägnätet på den lilla ön Storøya utanför Molde på Norges västkust. Varje nod är ett hus. Koefficienten på varje båge anger vägens längd.



a) Man ska införa elektricitet i byn, och därför koppla in alla husen. Anslutningen till stomlinjen ligger vid nod 6 (hamnen). Elkablarna kan bara dras längs med vägarna, och kostnaden för att dra en kabel längs en väg är proportionell mot vägens längd. Finn det billigaste elnätet som försörjer alla husen i byn. (2p)

b) Byns brevbärare Aldrigsen vill finna en runda startar och slutar i hamnen och passerar varje hus i byn (en gång), men som är så kort som möjligt. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Kan Aldrigsen förvänta sig att hitta en optimallösning i polynomisk tid (som funktion av antalet hus) om han skulle dela ut post på detta sätt i den väldigt stora staden Oslo? (1p)

c) Finn ett 1-träd på Storøya och ge Aldrigsen en undre gräns för hur lång hans runda blir. (1p)

d) Aldrigsen har läst om något som heter närmaste granne-heuristiken, och bestämmer sig för att använda den för att försöka hitta en bra runda. Han börjar i nod 1. Beskriv vad som händer och vilken lösning som fås. (1p)

e) Det har regnat och sedan blivit minusgrader, så vägarna har blivit väldigt hala. Man ber Aldrigsen sanda alla vägar. Han inser att han inte kan köra sina vanliga runda, men vill fortfarande köra så kort sträcka som möjligt. Vad är det för optimeringsproblem? Hur bör han köra? Beskriv lösningsmetoden. (3p)

f) Man ska måla sina hus. Ingen vill ha samma färg som en närliggande granne, men man vill minimera antalet färger på ön (eftersom det blir lite billigare). Vad är det för optimeringsproblem? Hur många färger krävs, och hur ska man måla husen? (1p)

g) Herr Gaabortsen går varje dag från sitt hem i nod 1 till hamnen vid nod 6. Han har ont i knät, och vill vara helt säker på att han går den kortaste vägen. Hur ska han gå? Ge ett helt säkert optimalitetsbevis (med hjälp av en känd metod). (2p)

h) Fru Gaabortsen går också varje dag från sitt hem i nod 1 till hamnen vid nod 6. Hon är sportigare och vill gå den längsta vägen. Vad är det för optimeringsproblem? Blir det lätt för fru Gaabortsen att hitta optimal väg? (1p)

i) För problemet i uppgift b finns en problemformulering där man har bivillkor på nodvalens. Skriv upp alla dessa bivillkor (inte med summor, utan med explicita variabler) för den specifika grafen ovan. Använd dessa bivillkor tillsammans med grafens utseende för att reducera problemet, dvs. fixera så många variabler som möjligt. (3p)

Uppgift 3

Betrakta följande problem.

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x) = & 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 & & \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 & \leq & 1 \\ & x_1^2 & \leq & 1 \end{array}$$

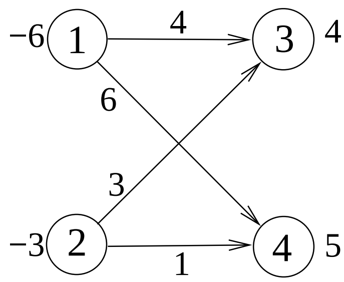
a) Är problemet konvext? (1p)

b) Avgör om någon av punkterna A: $(0, 0)$, B: $(1, 0)$, C: $(1, 1/2)$, D: $(-1, 1/2)$, E: $(4/9, 5/18)$ uppfyller KKT-villkoren. (3p)

c) Är någon av punkterna optimal? Varför (inte)? (1p)

Uppgift 4

I ett lager i nod 1 har vi 6 st traktorer och i lagret i nod 2 har vi 3 traktorer. I affären i nod 3 har vi fått beställnngar på 4 traktorer och i affären i nod 4 har vi beställningar på 5. Vi måste köra traktorerna från lagren till affärerna. Följande riktade graf anger de möjliga vägarna, där bågarna märkts med avstånd. Man kan köra hur många traktorer som helst på vägarna.



a) Använd simplexteknik (för nätverk) för att finna ett sätt att köra traktorerna så att den totala körsträckan minimeras och efterfrågan uppfylls. Ett möjligt sätt att köra är en traktor från nod 1 till nod 3, 5 traktorer från nod 1 till nod 4 och 3 traktorer från nod 2 till nod 3. Starta från denna lösning. Ange totalkostnad. (3p)

b) I uppgift a kördes totalt 9 traktorer från lagren till affärerna. Om man skulle ha en traktor till i nod 2, och behöva en traktor till i nod 3, skulle totala antalet förflyttade traktorer öka till 10. Logistikchefen tror att eftersom alla avstånd är positiva, borde totalt körd sträcka öka då man skickar mer. Kontrollera om det är så genom att finna nya optimallösningen. Starta från optimalbasen i uppgift a. Ange totalkostnaden. (2p)

c) Antag att det är *gratis* att förflytta traktorer från nod 2 till nod 3. (Utgå från optimallösningen i uppgift a.) Hur mycket är det då optimalt att skicka den vägen? (1p)

d) Ange samtliga tillåtna baslösningar till problemet ovan. (2p)

Uppgift 5

Betrakta nedanstående LP-problem.

$$\begin{array}{lrrcrcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange primal och dual optimallösning. (3p)

b) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Rita upp dualen grafiskt och markera den duala optimallösningen i grafen. (2p)

c) Hur förändras den duala optimallösningen om målfunktionskoefficienten för x_2 ökas till 4? Motivera grafiskt. Är den primala optimallösningen i uppgift a fortfarande optimal? (3p)