Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	19 mars 2011
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

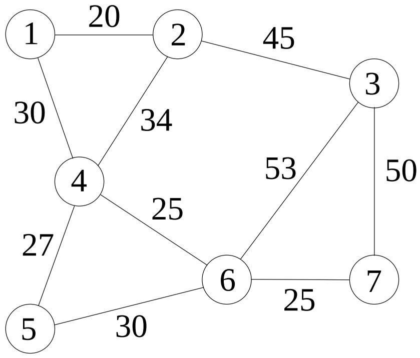
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firman SnabbaBud AB ska köra varutransporter i tätorten Österköping. Det relevanta, något förenklade, gatunätet ges nedan. Bågarna är märkta med avstånd mellan noderna (i sort 10 m). Alla gator kan trafikeras i båda riktningarna.



SnabbaBud har sitt garage i nod 1. De har två fordon, en Spajker Post budbil med bensinmotor, som kör med medelhastighet 10 m/s, och en Nissum Elvan laddhybrid, som kör med medelhastigheten 5 m/s. Elvan har två framdrivningssätt, antingen bara eldrift eller bara bensindrift. Batteriet i Elvan är helt urladdat efter 20 km i eldrift, och tar 6 timmar att ladda. Laddning kan bara ske i garaget.

Spajker Post drar ungefär dubbelt så mycket bensin per km som Nissum Elvan i bensindrift, och detsamma gäller koldioxidutsläppen (Spajker Post ger 200 g koldioxid per km, medan Nissum Elvan ger 100 g per km). Eldrift ger inga koldioxidutsläpp.

a) SnabbaBud får en beställning på en engångsleverans av ett paket från Sjöströms El i nod 2 till järnvägsstationen i nod 7. Hur ska man köra för att minimera det körda avståndet, om man struntar i att fordonet ska köra till och från garaget? Vilket känt optimeringsproblem är detta? Lös med standardmetod. Ange komplexitet. (2p)

b) Betrakta samma beställning som i uppgift a, men ta hänsyn till att fordonet ska starta i garaget och efter leveransen återvända dit. Hur ska man köra för att minimera det körda avståndet? Vilket känt optimeringsproblem kan detta formuleras som? Använd standardmetod. (2p)

c) Betrakta sträckan som ska köras enligt uppgift b (eller a). Nu vill man bestämma vilken bil man ska använda. Jonte (SnabbaBuds förare) vet inte vilken knapp han ska trycka på i Elvan för att ändra framdrivningssätt, så en sådan ändring kan bara ske i garaget. Därför finns tre alternativ för hela vägen: Spajker Post, Nissum Elvan med bensindrift eller Nissum Elvan med eldrift.

Ge en matematisk optimeringsmodell för problemet att minimera utsläppen för resan då tiden inte får överstiga K sekunder. Använd beteckningen c_{ij} för bågkoefficienterna (i grafen ovan) samt P för mängden bågar som ingår i den valda vägen, så att modellen blir mer generell och kan användas på vilken väg som helst. Obs: Modellen ska inte lösas, bara formuleras. (3p)

d) Lös modellen för siffrorna i uppgift b med $K = 2000$ (eller uppgift a med $K = 1000$). Det får göras på enklast möjliga sätt, men optimalitet ska vara bevisad. (1p)

e) Hur förändras modellen i uppgift c om Jonte hittar knappen, så att han kan koppla om från eldrift till bensindrift när som helst? Hur förändras lösningen i uppgift d? (2p)

f) SnabbaBud har lite dåligt med beställningar, så man bestämmer sig för att köra runt med ett fordon till alla potentiella kunder och lämna ut en reklamlapp. Det finns kunder längs alla gator, och man kan dela ut reklam till båda sidor av gatan på en gång, oavsett vilken riktning man kör. Man vill planera rundturen så att det körda avståndet minimeras. Behöver man köra någon gata två gånger? Vilket optimeringsproblem är detta? Använd en känd metodik. (2p)

g) SnabbaBud lägger anbud på reklamutdelning som görs till fots. Det ska gå till så att man lägger upp ett lager reklamblad vid vissa gatukorsningar (noder), så att utdelaren (Jonte) kan hämta reklamblad där och dela ut på alla närliggande gator. (Jonte vill aldrig gå längre än till nästa korsning för att hämta reklambladen.) Man funderar nu på vid vilka korsningar man ska lägga upp lager. Vilket känt optimeringsproblem är det att finna platser för lagren, så att man får så få lager som möjligt? Vilken komplexitet har problemet? Föreslå en (ev. approximativ) lösning. (2p)

h) SnabbaBud har nu så många beställningar att man bestämmer sig för att lägga upp en rundtur som man kör gång på gång. Rundturen ska passera varje nod en gång och vara så kort som möjligt. Jonte tittar på kartan och föreslår rundturen $1 - 2 - 3 - 7 - 6 - 5 - 4 - 1$. Hjälp Jonte att bevisa att denna tur är kortast, eller att finna en kortare. Ledning: Använd 1-trädsrelaxation samt lämplig förgrening. (4p)

i) SnabbaBud vill finna en sammanhängande graf utan cykler som förbinder de viktiga noderna 1, 5 och 7, så att grafens totala längd blir minimal. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Vilken komplexitet har problem? Använd en känd heuristik för att finna en tillåten och förhoppningsvis bra lösning. (Beskriv stegen i metoden.) (3p)

Uppgift 2

SnabbaBud AB planerar en transport mellan två punkter. Vägen mellan punkterna består av två delar. Del 1 är 10 km lång och medger en medelhastighet på högst 25 m/s. Del 2 är 12 km lång och medger en medelhastighet på högst 40 m/s. Man funderar på hur fort man ska åka. Om man struntar i negativa miljöeffekter, ska man givetvis åka så snabbt som möjligt. Man vill dock istället minimera utsläppen av koldioxid. Om man kör sträcka j med medelhastigheten x_j m/s så avges en mängd koldioxid proportionell mot $f_j(x_j)$, där $f_1(x_1) = -10x_1 + 0.1x_1^2$ och $f_2(x_2) = -10x_2 + 0.125x_2^2$. Man kräver dessutom att transporten inte ska ta mer än 1000 sekunder.

a) Formulera problemet som en matematisk (olinjär) optimeringsmodell. Ledning: Räkna med medelhastighet per del i m/s. Ytterligare en ledning: Ingen av de två delarna av vägen får givetvis ta mer än 1000 sekunder, vilket ger undre gränser på hastigheterna. Är problemet konvext? (3p)

b) Använd KKT-villkoren för att avgöra om det är optimalt att köra med de ovan angivna högsta möjliga medelhastigheterna. (3p)

c) Hör snabbt är det miljömässigt bäst att köra om man struntar i alla bivillkor? (1p)

Uppgift 3

Företaget SnabbaBud AB expanderar. Man ämnar nu satsa på snöröjning av den större staden Västerköping. Man anskaffar 5 traktorer med snöplog, samt hyr in 5 förare från bemanningsföretaget Pullia. Västköping är naturligt indelat i 5 områden, så man kan låta varje förare ta hand om ett område. För att få bästa möjliga resultat, låter man varje förare fylla i en tabell över hur väl han/hon känner till de olika delarna av Västköping, och söker sedan en tillordning mellan förare och område så att man maximerar nyttan av lokalkännedomen. Jonte har stött på detta optimeringsproblem förut, men då som ett minimeringsproblem, så han räknar om koefficienterna (genom att invertera dem), så att uppgiften nu blir att minimera en målfunktion innehållande summan av följande koefficienter. (Raderna står för förare och kolumnerna för område.)

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 & 20 & 17 \\ 15 & 11 & 17 & 16 & 14 \\ 22 & 15 & 13 & 21 & 18 \\ 10 & 10 & 18 & 18 & 19 \\ 13 & 11 & 19 & 23 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Vad är det för välkänd problemklass? Lös problemet med en standardmetod. (2p)

b) Förändras optimallösningen om koefficient c_{23} minskar från 17 till 13? Motivera, men lös inte om problemet. (1p)

Uppgift 4

När Jonte sitter och läser en spännande bok (mellan uppdragen) stöter han oväntat på följande LP-problem.

$$\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 3 \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Författaren låter hjälten i boken (Tarzan) lösa problemet med viss ansträngning. Den kvinnliga huvudpersonen (Jane) påpekar då att variablerna bör ha heltaliga värden, varpå Tarzan utbrister att problemet är olösligt och rusar ut genom dörren.

a) Hjälp Tarzan/Jonte/Jane och lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning, målfunktionsvärde samt vilka bivillkor som är aktiva i optimum. Är optimallösningen unik? (3p)

b) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös dualen grafiskt. Kan man se något speciellt i relationen mellan några duala bivillkor? Vad innebär det för det primala problemet? (3p)

c) Lägg till heltalskrav på alla variabler i uppgift a. Kan några fixeringar (a la Balas) göras? I så fall gör detta. (Jämför med observationen i uppgift b.) Lös sedan problemet med Land-Doig-Dakins metod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange alla undre och övre gränser på det optimala målfunktionsvärdet som erhålls under algoritmens gång. (3p)