Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	10 mars 2012
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

När man betraktar avgaser som släpps ut vid biltrafik i städer, visar det sig att mängden avgaser ökar olinjärt som funktion av antal bilar på en sträcka. Detta beror på att det blir flera stopp och starter än när en något glesare trafik rullar fram i jämn takt. Tiden det tar att köra en viss gata blir längre vid trafikstockningar, vilket också ökar mängden avgaser.

Man kan använda den (något förenklade) formeln $f_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij} + 0.1x_{ij}^2$ för den negativa miljöpåverkan som ges då x_{ij} bilar kör på gatan från nod i till nod j, där c_{ij} är längden av gata (i, j).

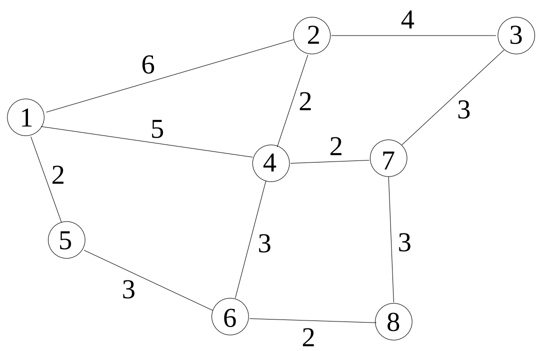
Som del i arbetet för en hållbar utveckling vill man arbeta för miljövänlig trafik. Man kan försöka styra trafiken på olika sätt. Ett första steg är dock att beräkna den miljömässigt optimala trafiken, för att sedan försöka styra mot den med olika åtgärder.

Vi representerar trafiknätet med en riktad graf med noderna (korsningarna) N och bågarna (gatorna) B. (Oriktade gator modelleras helt enkelt med två motriktade bågar.) Vi betraktar morgontrafiken, och låter a_i vara det antal bilar som startar sin resa i nod i och b_i antalet bilar som avslutar sin resa i nod i. Dessa siffror kan uppskattas med hjälp av antalet anställda på arbetsplatsen vid nod i, och antalet boende vid plats i.

a) Formulera problemet att bestämma de trafikflöden som uppfyller behovet av förflyttningar så att de skadliga miljömässiga effekterna minimeras, som en matematisk optimeringsmodell. (2p)

b) Genom att strunta i avgaserna, kan man istället finna den lösning som minimerar total körd sträcka. Man tror att bilisterna själva kommer att köra ungefär så. Formulera detta problem som en matematisk optimeringsmodell. Är detta ett standardproblem, och i så fall vilket? (1p)

c) Betrakta följande nätverk från Mjölby, med gatulängder givna för bågarna. (Bågarna har ritats oriktade eftersom ingen av gatorna är enkelriktad.)



Firman BT, som ligger i nod 1, är Mjölbys största arbetsgivare, med 100 anställda. Dessutom arbetar 50 i centrum, nod 4, samt 10 i järnvägsstationen, nod 8. Boende fördelas på bostadsområde enligt följande: 80 i nod 3, 40 i nod 6, 20 i nod 5, 10 i nod 2 och 10 i nod 7.

Om man löser problemet i uppgift b (med Vineopt), fås följande lösning: Båge (2,1) flöde 10, båge (3,7) flöde 80, båge (4,1) flöde 30, båge (5,1) flöde 60, båge (6,5) flöde 40, båge (7,4) flöde 80, båge (7,8) flöde 10. Total körd sträcka: 870.

Ange basträd. Beräkna reducerade kostnader och verifiera att denna lösning är optimal. (2p)

d) Betrakta lösningen i uppgift c. Man funderar på att bygga "sydvästra länken" mellan nod 4 och nod 5. Hur lång får den högst vara, om den ska få någon trafik (enligt modellen i uppgift b)? (1p)

e) Betrakta lösningen i uppgift c. Antag att man bygger om gatan mellan nod 3 och 2 så att den blir lite kortare och man får $c_{32} = 3$. Beräkna ny optimallösning. (2p)

f) Betrakta Mjölbys trafiknätverk. En "vacker" dag har det snöat väldigt mycket, och man måste ploga varje gata. (Man har bara en snöplog.) Hur ska snöplogen köra för att behöva köra en så kort sträcka som möjligt? Behöver den köra någon redan plogad gata? (3p)

g) Betrakta Mjölbys trafiknätverk. Man funderar på att bygga att ordentligt fibernät i staden, kopplat till förgreningspunkter i varje nod. (Från dessa förgreningspunkter ska man använda existerande kopparkabel ut till bostäderna.) Hur ska man bygga, om man vill få nätet så billigt som möjligt, och inte beaktar risken att någon länk går sönder? Vilket problem är detta? Är det svårt? Lös det. (2p)

h) Betrakta frågeställningen i uppgift g. Nu inser man att länkar i fibernät kan gå sönder. Man antar dock att en länk i taget går sönder, och att man hinner laga den innan nästa går sönder. Man kräver alltså att det ska finna två vägar mellan varje par av noder. Vilken lösning blir nu billigast? Vilken problemtyp är detta? Är det lätt?

För att förenkla, kan man använda viss problemreduktion. Gör detta. (Ledning: Betrakta noder med valens två.) Lös problemet. (3p)

i) Betrakta Mjölbys trafiknätverk. Man funderar på att ge en färg till varje korsning i staden, för att underlätta vägbeskrivningar för turister. Det får dock inte vara samma färg på två korsningar som förenas med en direktgata. Man vill minimera antalet färger, för att kunna använda rena tydliga färger (rött, blått, grönt) och undvika krångel med många olika nyanser (mörkviolett). Hur få färger klarar man sig med? Motivera. Ge en lösning. (1p)

j) Betrakta problemet i uppgift a, med olinjär målfunktion. Man anser sig inte kunna lösa olinjära optimeringsproblem (i Mjölby). Därför vill man införa en approximativ linjärisering av målfunktionen.

Man kan räkna ut $f_{ij}(x_{ij})$ för vissa värden på x_{ij} (t.ex. 0, 10, 20, 30, 40 och 100), och använda en rät linje mellan dessa punkter. Hur kan man på detta sätt få ett linjärt flödesproblem? (Ledning: Fundera på parallella bågar.) Beskriv modellen, dvs. nätverket. Spelar det någon roll att funktionen är konvex? (2p)

Uppgift 2

I Mjölby produceras mjöl. Produktutvecklarna vid Lantfolket AB funderar på att göra en ny mjölblanding, som ska kallas "miljömjöl". Man tänker sig en blandning av vetemjöl och rågsikt, samt ett tillskott av kravodlat havremjöl.

Man ska göra ett paket som inte får väga mer än 2 kg, och vill bestämma i vilka proportioner ingredienserna ska blandas. För att kunna utnyttja PR-fördelen av det kravmärkta havremjölet, kräver man att det inte får vara mer än dubbelt så mycket vetemjöl som havremjöl. För att miljömjölet inte ska innehålla för mycket kalcium kräver man att $4x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 20$, där x_j står för mängd (i kg) av mjölsort j man använder (i ordningen vetemjöl, rågsikt, havremjöl). Man vill maximera vinsten för ett paket. Vetemjöl ger vinsten 6 kr/kg, rågsikt 4 kr/kg och havremjöl 3 kr/kg.

a) Formulera problemet som ett LP-problem. (2p)

b) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimal mjölblandning, vinsten per paket samt vilka begräsningar som påverkar lösningen. (3p)

c) Formulera LP-dualen till problemet i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift b. (2p)

d) Ändras optimallösningen om vinsten för rågsikt blir 6 kr/kg? (1p)

e) Efter utförliga diskussioner med smakexperter och andra kunniga, har man kommit fram till att man kan optimera vinst, smak och vissa miljöaspekter genom att minimera målfunktionen $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_1 - 2x_2$. Bivillkoren är desamma som i uppgift a. Man har räknat ut att egenvärdena till Hessianen för denna funktion är 1.2679, 2.0000 och 4.7321. Vad betyder det?

Konsulten MjölOpt påstår att den optimala lösningen är $x_1 = 2/3$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1/3$. Stämmer det? Kontrollera lösningen med KKT-villkoren. (3p)

Uppgift 3

Vattnet i kranarna i Mjölby har blivit lite brungult, vilket upplevs som negativt. Reningsverket har därför fått i uppgift att minska utsläppen av järn och humusämnen i Svartån (varifrån man tar sitt dricksvatten). För att göra detta planerar man att skaffa filter för att rena vattnet. Det finns järnfilter och humusfilter, och man kan koppla in flera stycken i serie så att effekten blir additiv. Varje järnfilter reducerar mängden järn med 2 mg per liter, men också mängden humus med 1 mg. Varje humusfilter reducerar mängden humus med 3 mg per liter, men också mängden järn med 1 mg. Kravet är att man ska minska mängden järn med minst 5 mg per liter och mängden humus med minst 4 mg per liter. Frågan är alltså hur många filter man ska skaffa av varje sort. Ett järnfilter kostar 20 000 kr och ett humusfilter kostar 30 000 kr, och man vill minimera kostnaden.

a) Formulera problemet som ett linjärt heltalsproblem. (Man kan anta att mängden järn och humus i vattnet är betydligt större än de mängder som tas bort, så man behöver inte beakta fallet att något av dessa ämnen blir noll, och kan betrakta sambanden som linjära.) (2p)

b) Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Ange optimallösning. (Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt.) (3p)

c) Ange grafiskt det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna. (1p)

Uppgift 4

Betrakta gatunätet i Mjölby, se uppgift 1. Polisstationen ligger vid Skänningevägen, i nod 3, och man vill veta hur lång tid det tar att rycka ut till de olika noderna. Polisen anser att man kör med konstant medelhastighet (men vill inte säga hur hög den är), så man kan få svaret genom att hitta de vägar som ger kortast avstånd.

a) Finn kortaste avståndet till alla noder från nod 3, samt ange vilka vägar polisen bör köra. (Använd en lämplig metod.) (3p)

b) Politikerna i Mjölby vill minska trafiken i centrum och funderar på att begränsa farten på gatorna (2,4), (4,6) och (4,7) (i båda riktningarna) med farthinder, så att farten i princip halveras. Frågan är om dessa hinder ska gälla polisen också. Hur påverkas utryckningstider och -vägar av dessa ändringar? (1p)