Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	2 juni 2012
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget MultiFlex AB funderar på att börja använda den gamla svarven som står oanvänd i ett hörn. Man kan göra ljusstakar och/eller stolsben med den. En ljusstake ger vinsten 40 kr och ett stolsben 10 kr. En ljusstake kräver uppborrning av två hål, och borren är så upptagen att man högst kan borra 5 hål per timme. Svarven är långsam och det tar 17 minuter att göra en ljusstake eller ett stolsben. Resten av en stol tar två timmar i andra maskiner, och eftersom man inte vill lägga stolsben på hög, bestämmer man att man ska tillverka maximalt två stolsben per timme.

Problemet att bestämma hur svarven ska användas så att vinsten maximeras kan formuleras som ett optimeringsproblem på följande sätt, där x_1 står för antalet ljusstakar man gör per timme och där x_2 antalet stolsben man gör per timme.

$$
\begin{array}{lrrcrcrl}
\max & z = & 40x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & & & \leq & 5 & (1) \\
 & & 17x_1 & + & 17x_2 & \leq & 60 & (2) \\
 & & & & x_2 & \leq & 2 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

En utbildad ingenjör påpekar att bivillkor 2 kan ersättas med $x_1 + x_2 \leq 3.52$. En annan ingenjör påpekar att variablerna bara bör få anta heltaliga värden.

a) Lös heltalsproblemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Gå ner i $\leq$-grenen först. (Förändringarna i uppgift b får inte användas här.) (3p)

b) En ännu bättre utbildad ingenjör påpekar att problemformuleringen är onödigt dum. Om man tänker på heltaligheten kan vissa bivillkor skrivas på ett bättre sätt. Gör dessa förändringar i problemet, och avgör hur lösningsgången i uppgift a skulle förändras. Grafisk motivering får användas. (2p)

c) Man bestämmer att det inte är tillåtet att göra både ljusstakar och bordsben, utan produktionen ska vara antingen ljusstakar eller bordsben. Gör nödvändiga omformuleringar (tillägg av bivillkor etc) av modellen för att detta bivillkor ska gälla. (Man ska inte lösa problemet, utan bara formulera modellen.) (2p)

d) Betrakta problemet och lösningen i uppgift a. Man bestämmer sig för att räkna målfunktionsvärde i hela tiotal kronor, så målfunktionen blir $z = 4x_1 + x_2$. Förändrar det lösningsgången i uppgift a? (1p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. MultiFlex bestämmer sig för att strunta i heltalskravet och se vad man kan få fram genom att studera LP-problemet.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimal lösning samt vilka begränsningar som påverkar lösningen. (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Ange skuggpriserna och förklara vad de betyder för detta problem. (2p)

c) Formulera LP-dualen till LP-problemet som löstes i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda, och förklara deras ekonomiska betydelse. (3p)

d) En outbildad anställd kommer på att man kan göra ett runt brännbollsträ med svarven. Det tar lika lång tid att göra ett sådant som ett bordsben, det kräver ingen borrning, och det ger vinsten 20 kr per trä. Inför en ny variabel i problemet som möjliggör detta. Verkar denna produkt lönsam att göra? Svara på frågan med hjälp av reducerad kostnad. (Lös ej färdigt, och lös ej om från början.) (1p)

e) Antag att man gör som i uppgift 1d, nämligen räknar målfunktionsvärde i hela tiokronor. Vad blir då den optimala duallösningen? (1p)

Uppgift 3

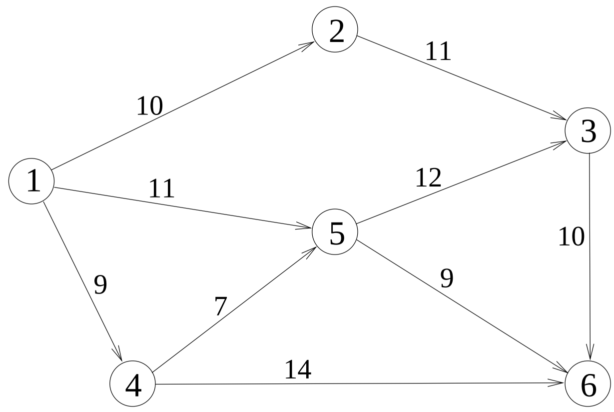
Betrakta problemet i uppgift 1. Genom att studera spillet av de olika träslagen man använder sig av, energiförbrukningen av svarven, samt ta hänsyn till att en viss del av förtjänsten används för miljöförbättrande åtgärder, finner man att den totala miljöpåverkan av svarvens verksamhet kan beräknas som $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 10x_2 + x_1x_2 + 16$. Betrakta problemet att minimera $f(x)$ under följande bivillkor:

$$
\begin{array}{rcrcll}
2x_1 & & & \leq & 5 & \quad (1) \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & \quad (2) \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \quad (3) \\
x_1 & & & \geq & 0 & \quad (4) \\
 & & x_2 & \geq & 0 & \quad (5)
\end{array}
$$

Sätt upp KKT-villkoren för problemet. Kontrollera huruvida följande punkter är KKT-punkter och optimalpunkter: $x^{(1)} = (2.5, 0.5)$, $x^{(2)} = (2, 1)$, $x^{(3)} = (2, 2)$, $x^{(4)} = (1, 1)$. (3p)

Uppgift 4

Betrakta det riktade nätverket med bågkostnader nedan.



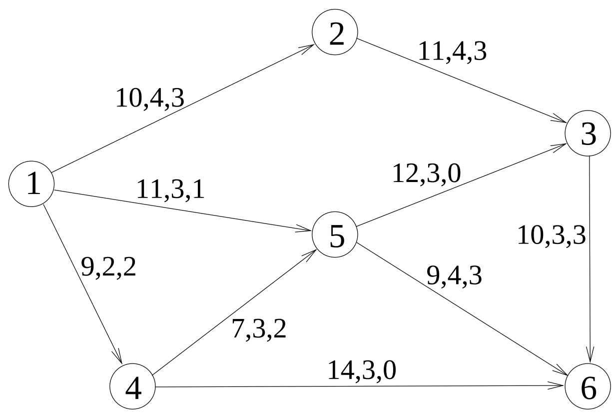
a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 6 samt billigaste väg från nod 1 till nod 3. (2p)

b) Ange en dual lösning (nodpriser) som är optimal för båda vägarna i uppgift a. (1p)

c) Inför en båge från nod 2 till nod 5. Vad får den högst kosta för att billigaste vägen från nod 1 till nod 6 ska gå via den bågen? Använd nodpriser. (1p)

Uppgift 5

Betrakta det riktade nätverket med bågkostnader, kapaciteter och flöde nedan. (Undre gränser är noll.) Uppgiften är att skicka 6 enheter från nod 1 till nod 6 på billigaste sätt.

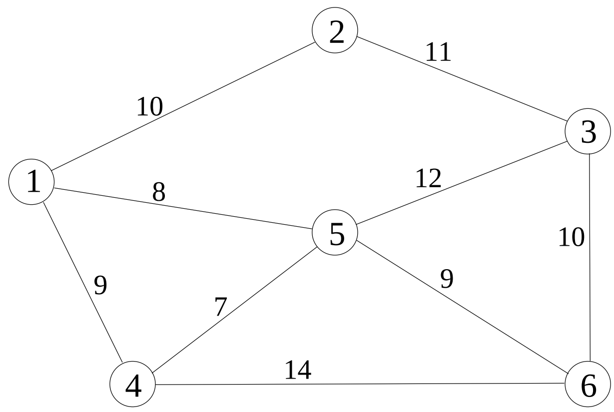


a) Visa med simplex-teknik att lösningen inte är optimal. Välj en inkommande variabel och gör en iteration i simplexmetoden. Avgör om den erhållna lösningen är optimal. (3p)

b) Antag istället att alla bågarna har kapacitet 2. Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med att skicka två enheter vägen 1 - 2 - 3 - 6 och två enheter vägen 1 - 4 - 5 - 6. Ange ett snitt som skiljer nod 1 från nod 6 som *inte* är ett minsnitt. (3p)

Uppgift 6

Betrakta det oriktade nätverket med bågkostnader nedan.



a) Finn billigaste uppspännande träd i grafen. Ange metod, samt totalkostnad. (1p)

b) Finn billigaste 1-träd i grafen. Ange totalkostnad. (1p)

c) Finn en handelsresandetur med valfri heuristik. Ange totalkostnad. (1p)

d) Utnyttja resultaten i uppgift a, b och c och ange gränser för kostnaden för den billigaste handelsresandeturen. (1p)

e) Utgå från lösningen i uppgift b och gör en förgrening som kan användas för att lösa handelsresandeproblemet med trädsökning. Lös bara ett av delproblemen. (2p)

f) Finn billigaste brevbärartur i ovanstående graf. Matchningsproblem får lösas med inspektion. (3p)