Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	22 augusti 2012
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Tutti Produtti i Vikingstad tillverkar allehanda produkter för den internationella turistmarknaden. I ett visst skede har man att välja mellan tre olika produkter, som delar på två gemensamma råvaror.

Överingenjör Ståhlberg anser att erfarenheten säger att produkt 1 är mest vinstgivande, och att man bara bör tillverka den. Nyutexaminerade ingenjör Ricardo Carbonati tycker att man nog borde räkna på det. Han ställer med visst besvär upp följande linjära optimeringsmodell, där x_j står för antal producerade enheter av sort j och bivillkoren står för råvara 1 och 2. Han har som mål att minimera kostnaden (för det gjorde man alltid på högskolan i Ödeshög).

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & z = & -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 & \quad (1) \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Ta reda på om överingenjör Ståhlberg har rätt genom att lösa problemet ovan med simplexmetoden. Ange optimallösning samt huruvida det blir något över av någon råvara. (3p)

b) Formulera LP-dualen till problemet i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

c) Man upptäcker att högerledet till bivillkor 2 ska vara 5 (istället för 4). Antag att den optimala basen inte ändras, och beräkna den nya lösningen genom att läsa ut B^{-1} ur optimaltablån och beräkna nya lösningen med hjälp av den. Är den därvid erhållna lösningen optimal? (Att lösa om problemet med simplexmetoden ger inga poäng här.) (3p)

d) Utgå från lösningen i föregående deluppgift och lös heltalsproblemet (som anges i uppgift c) med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. (Om du inte har LP-lösningen, är det här tillåtet att lösa om med simplexmetoden.)

Ledning: Det senast tillagda snittet är alltid aktivt. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1a. Överingenjör Ståhlberg bestämmer att x_2 är dålig, och inte ska vara med i optimallösningen alls. Dessutom påverkar produkt 1 och 3 varandra på ett oväntat sätt. Målfunktionen blir nu

$\min\ f(x) = -3x_1 - x_3 - 2x_1^2 - x_3^2 - x_1x_3$

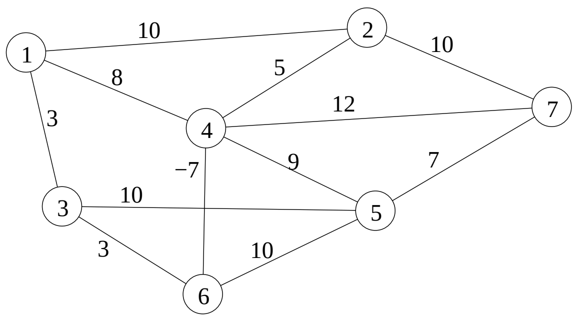
Bivillkoren är desamma som i uppgift 1a.

a) Är problemet konvext? (1p)

b) Rita upp det tillåtna området (med $x_2 = 0$). Identifiera alla extrempunkter till området, och kontrollera för varje sådan huruvida punkten uppfyller KKT-villkoren. Vilka slutsatser kan dras om var optimum ligger? (3p)

Uppgift 3

Nedanstående nätverk anger vägar som kan byggas i den nyanlagda "Vallastaden". (Alla vägar kan användas i båda riktningarna.) På varje väglänk står kostnaden för att bygga den (i miljoner). (Om man får statsbidrag, kan kostnaden bli negativ, dvs. man tjänar pengar på att bygga länken.)



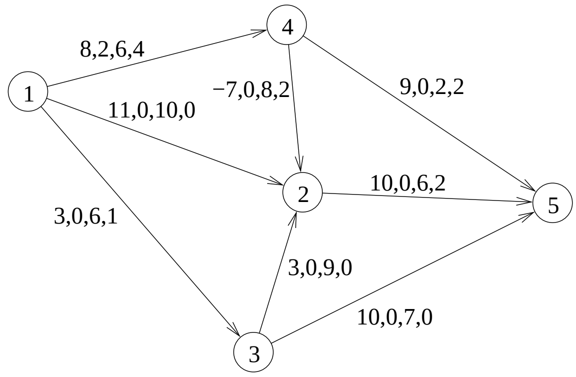
a) Vid en första planering vill man bara bygga vägar så att området blir sammanhängande, dvs. så att man på något sätt kan ta sig från vilken nod som helst till vilken annan nod som helst. Man vill givetvis minimera kostnaden. Vilket optimeringsproblem är detta? Lös det (med välvald metod). (2p)

b) Det vore trevligare, tycker man, om det fanns en rundtur som passerade varje nod, så att man kan komma till valfri nod genom att bara köra runt. Vilket optimeringsproblem är det att finna vilka vägar som ska byggas för att få en (och bara en) billigaste sådan rundtur? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. (Ledning: Det finns en relaxation som inte är ett träd, men heter något med "träd".) Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

c) På vintern måste man ploga bort snön från gatorna. Vilket optimeringsproblem är det att finna en rundtur som passerar varje gata minst en gång? Detta problem kan vara lättare för vissa typer av grafer och svårare för andra. Betrakta de två typerna av lösningar som man får i uppgift a och uppgift b, och fundera på hur svårt problemet för dessa grafer. Är något lättare än det andra, och i så fall varför? (2p)

Uppgift 4

Betrakta nedanstående nätverk med följande data på bågarna: kostnad, undre gräns, övre gräns, flöde (i denna ordning).



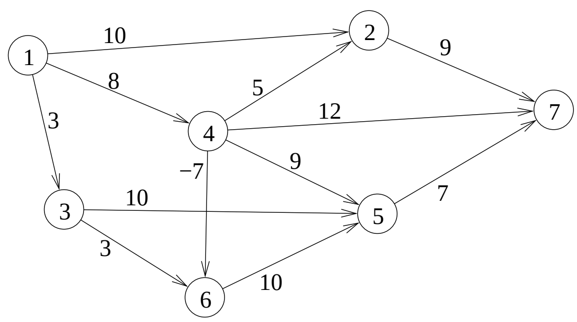
a) Utgör flödet i grafen en *baslösning* i minkostnadsflödesproblemet där nod 1 är en källa av styrka 5, nod 5 en sänka av styrka 4 och nod 3 en sänka av styrka 1? Motivera. (2p)

b) Starta med ovanstående lösning och finn ett minkostnadsflöde med simplexteknik. (3p)

c) Hur mycket skulle man behöva sänka kostnaden på båge (3,5) för att det ska bli billigare att skicka flöde den vägen? (1p)

Uppgift 5

Betrakta följande riktade nätverk med bågkostnader.

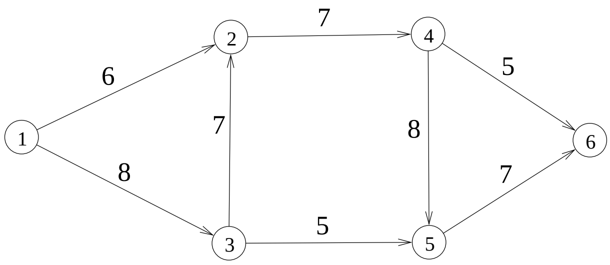


a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 7. Ange metod. (3p)

b) Om man inför in ny båge från nod 2 till nod 5 och vill att den ska ge en billigare väg från nod 1 till nod 7 än den man fann i uppgift a, vad får den högst kosta? (1p)

Uppgift 6

Bågarna i nedanstående nätverk är märkta med kapacitet (övre gräns). Alla bågar har undre gräns noll.



Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flödet noll i alla bågar. Följ metoden noga. (3p)

Uppgift 7

Betrakta följande LP-problem.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & z = 6x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{då} & 10x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & \leq & 19 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Är $y = 1$ den optimala lösningen till LP-dualen till problemet ovan? Motivera noga. (2p)

b) Beräkna den optimala (primala) lösningen till problemet ovan med hjälp av LP-dualitet/komplementaritet. (2p)