Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	11 mars 2013
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Västerköpings kommun ska uppföra nya reningsverk. Man får använda högst 34 miljoner kr på detta. Det finns fyra olika möjligheter, och man vill bygga ett eller flera. Man har uppskattat nyttan av varje möjligt reningsverk, samt kostnaden att uppföra detta, och detta ges i tabellen nedan.

Reningsverk	Nytta	Kostnad (milj kr)
1	3	10
2	4	10
3	6	12
4	5	8

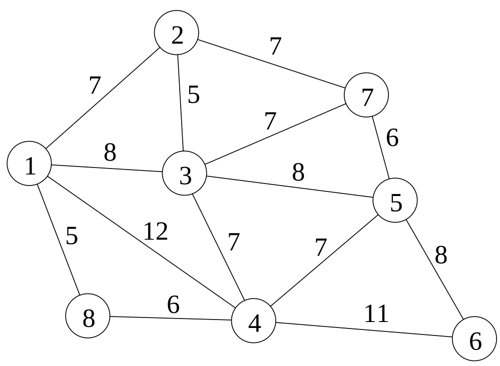
a) Formulera problemet att välja vilka reningsverk som ska byggas så att nyttan maximeras, utan att det kostar för mycket, som ett binärt kappsäcksproblem. (1p)

b) Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Var noga med att notera övre och undre gränser som fås under proceduren. Ledning: LP-relaxationen kan lösas som beskrives i avsnitt 7.5 i boken. (3p)

Uppgift 2

Mittköpings kommun ska göra en inventering av gatorna i tätorten. Man hyr en specialbyggd bil som långsamt kör längs gatorna och mäter kvaliteten av vägbanan med flera kameror. Man betalar per timme och hyran är hög, så man vill minimera tiden bilen behövs. Bilen kör i konstant hastighet, och man vill undersöka samtliga huvudgator.

Nedanstående nätverk motsvarar de huvudgator som man ska undersöka. Bågkoefficienterna anger avstånd, och gatorna kan anses vara oriktade. Man ska hämta och lämna bilen i nod 1.



a) Vilka gator måste köras mer än en gång i den bästa rundturen för bilen? Motivera. (2p)

b) När man har undersökt alla gator, kom man på att man har glömt undersöka korsningarna. Man måste därför köra en rundtur till, men nu så att man besöker varje korsning. Vilket optimeringsproblem är detta, och hur svårt är det (teoretiskt)? Finn en tillåten och ganska bra lösning (med lämplig metod). Finn även en optimistisk uppskattning av längden av den optimala turen, så att man får veta hur långt ifrån optimum lösningen är. (3p)

c) Kommunen bestämmer sig för att bygga ut ett eget trådlöst bredbandsnät. Man placerar en basstation i varje korsning (nod) och ska dra fibrer längs med vägarna, så att alla noder kopplas ihop. Servern som sköter kommunikationen med resten av världen ligger i nod 6.

Hur ska man bygga nätet så att det blir så billigt som möjligt? (Kostnaden för basstationerna är ju konstant, och fibern har en given meterkostnad, så man kan använda båglängderna för minimeringen.) (2p)

d) Innan lösningen i uppgift c hinner realiseras, kommer man på att man kan köpa nyare och starkare basstationer, så att det räcker att placera dem i noderna 1, 7, 6 och 8, för att täcka alla invånarna i staden. (Det behövs alltså inga basstationer i noderna 2, 3, 4 och 5.) Man vill fortfarande finna billigaste sättet att förbinda alla dessa noder med fibrer längs vägarna. Vilket optimeringsproblem blir det nu? Vad säger komplexitetsanalysen för detta problem, jämfört med det i uppgift c? Finn en skaplig lösning med någon av heuristikerna i boken, t.ex. genom starta med lösningen i uppgift c. (2p)

Uppgift 3

Botvids Cykelfabrik planerar produktionen för april. Det finns tre olika varianter av cyklar man kan göra, Hybrid, Racer och TourDeLux. Produktionen begränsas bara av två saker, nämligen växeldrev och sadlar. Man har bara fått tag i 6 sadlar och 7 växeldrev. Varje cykel ska ha en sadel. En Hybrid kräver två växeldrev, medan en Racer kräver tre st. TourDeLux är oväxlad, och kräver inget drev.

Vinsten av att sälja en cykel är 2000 kr för en Hybrid, 5000 för en Racer och 4000 för TourDeLux. Botvid vill maximera vinsten.

Botvid tycker inte att det gör något om det finns delvis färdiga cyklar vid månadsskiftet, så han kräver inte att lösningen måste vara heltalig.

a) Formulera problemet som ett LP-problem med variablerna x_j lika med antal cyklar av sort j man gör, och lös problemet med simplexmetoden. (3p)

b) Botvid kan byta en sadel mot ett växeldrev, eller ett växeldrev mot en sadel. Vilket byte tjänar han mest på? (Lös ej om problemet. Använd istället skuggpriser för att motivera svaret.) (1p)

c) Botvid funderar på att göra en tandemcykel. Den skulle ha två sadlar och inget växeldrev, och skulle ge förtjänsten 6000 kr per såld cykel. Skulle det vara lönsamt att tillverka denna sort? (Lös ej om problemet.) (1p)

Uppgift 4

Kerstins Kemi AB ska börja sälja ett isborttagningsmedel som man kan spruta ut på garageinfarten eller yttertrappan så att isen smälter, eftersom kunderna har efterfrågat en sådan produkt. För att göra en liter av medlet kan man blanda ihop två ganska miljöförstörande vätskor i valfria proportioner. Eftersom den andra vätskan är värre än den första, beräknar Kerstin att miljöpåverkan som fås av blandningen kan beräknas som $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ där x_1 och x_2 är den mängd av de två vätskorna som användes (räknat i liter). Kraven är att det ska bli minst en liter tillsammans, samt att inga mängder får vara negativa. (Inget annat än de två vätskorna ingår.)

a) Kerstin formulerar problemet att finna den blandning som minimerar miljöpåverkan som

min $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ då $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

Är problemet konvext? (1p)

b) Rita upp det tillåtna området. Identifiera alla extrempunkter till området, och kontrollera för varje sådan huruvida punkten uppfyller KKT-villkoren. Vilka slutsatser kan dras om var optimum ligger? (Ledning: I detta problem är KKT-villkoren nödvändiga för optimalitet.) (3p)

c) Kerstin inser att det är dumt att bara beakta extrempunkter. Istället för att kontrollera givna punkter, kan man göra antaganden om vilka bivillkor som är aktiva. Hon antar därför att det ska bli precis en liter, samt att båda vätskorna ska ingå i blandningen. Kontrollera huruvida dessa antaganden ger en KKT-punkt. Fås optimum? (2p)

Uppgift 5

Betrakta följande förenklade Sudoku-aktiga spel. I nio rutor i en 3×3-matris ska man fylla i talen 1, 2 och 3 så att det är en siffra av varje sort i varje rad och i varje kolumn. Det blir alltså tre ettor, tre tvåor och tre treor. Vissa siffror är givna från början.

a) Formulera problemet att hitta en tillåten lösning som ett linjärt heltalsproblem. (Ledning: Binära variabler rekommenderas.) (2p)

b) Finn en lösning till följande exempel med bivillkorsfixeringar, även kallat Balas metod. (Man behöver dock inte förgrena.) Beskriv noga hur variablerna i modellen i uppgift a fixeras, och varför. (2p)

1		
2		1

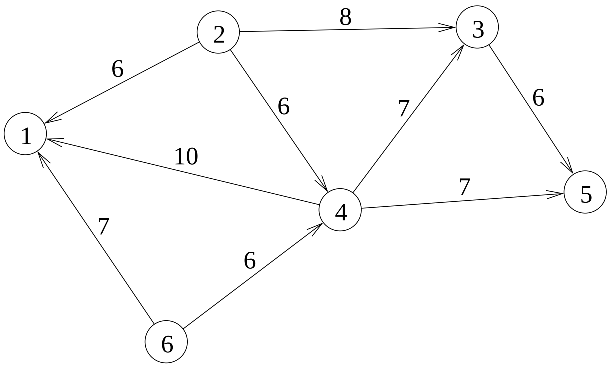
Uppgift 6

Bortanskog AB har avverkat flera skogsområden, och nu ligger timret i stora travar på flera olika ställen. Man ska nu frakta timret till sina sågverk.

Nätverket nedan visar de skogsvägar man kan använda. De är enkelriktade, eftersom man inte har plats att mötas. Sågverken ligger i noderna 1 och 5, och timret ligger på följande platser: 4 ton i nod 2, 5 ton i nod 3 och 3 ton i nod 6. Varje sågverk kan ta emot 6 ton.

Man kör med traktorer som maximalt kan ta 10 ton. Eftersom traktorerna spyr ut mer avgaser när de är lastade, och Bortanskog är miljömedvetna, räknar man med linjära kostnader som är avståndet gånger lastad mängd för varje väglänk. (Det gör att man inte behöver bry sig om hur traktorerna kör när de inte har last.)

I grafen nedan är varje båge märkt med sin längd i km.



Man har för hand räknat ut följande lösning. Alla 3 ton i nod 6 skickas till nod 1. Man kan då bara skicka 3 ton från nod 2 till nod 1, så ett ton skickas istället till nod 4 och sedan vidare till nod 5. Alla 5 ton i nod 3 skickas till nod 5.

a) Bortanskog tror att deras lösning är den som minimerar kostnaden. Ta reda på om detta är sant, med hjälp av simplexmetoden för minkostnadsflödesproblem. Om det inte är sant, beräkna det bästa lösningen. (3p)

b) Vägen från nod 2 till nod 3 är mycket krokig. Genom att räta ut den kan man minska avståndet till 6 km (från 8 km). Skulle en sådan åtgärd ge en bättre lösning än den i uppgift a? (1p)

c) Finn kortaste väg från nod 6 till varje annan nod. Ange metod. (2p)

d) Antag att man vill finna maximalt möjligt totalt flöde från skogsnoderna 2 och 3 till sågverksnoderna 1 och 5, där varje båge har kapacitet 10. Gör nödvändiga omformuleringar (t.ex. i grafen) för att detta problem ska kunna lösas som ett normalt maxflödesproblem. Lös problemet och ange minsnitt. (3p)

Uppgift 7

Fyra datatekniker ska felsöka fyra olika koder. Teknikerna har olika erfarenheter och är därför olika skickliga. Nedanstående matris anger hur lång tid man uppskattar att det tar för de olika teknikerna (raderna) att hitta felet i de olika koderna (kolumnerna).

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 8 \\ 3 & 5 & 9 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Finn en tillordningen av datatekniker till koder så att den totala tiden minimeras. Använd ungerska metoden. (2p)

b) Hur ändras lösningen om tekniker 3 går en kurs och blir 2 enheter snabbare på alla sorters koder? Motivera (utan att lösa om problemet). (1p)