Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	3 juni 2013
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

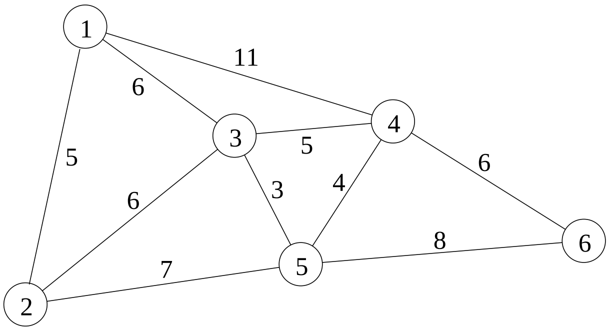
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

David ska åka till Bonn och gå på museer. Nedanstående graf visar de museer han vill gå på, samt möjliga vägar mellan dem. På bågarna anges avståndet.



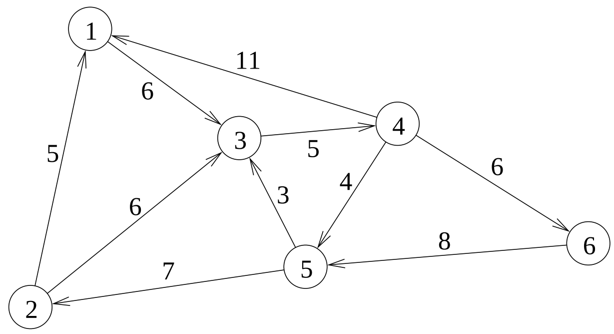
a) David vill göra en rundtur som passerar varje museum exakt en gång. Eftersom han fotvandrar i gassande sol, vill han gå en så kort sträcka som möjligt. Vad är det för optimeringsproblem att finna den kortaste turen? Finns det polynomiska optimerande metoder för detta problem? Hjälp David att hitta en rundtur på valfritt sätt. David undrar om turen han hittade verkligen är den kortaste. Hjälp honom att hitta en undre gräns för den optimala sträckan genom att lösa en relaxation av problemet. Ange övre och undre gränser för längden av den kortaste rundturen. (3p)

b) Hur skulle David kunna bära sig åt för att verkligen hitta den bästa turen? Beskriv en trädsökningsmetod som gör detta som använder relaxationen i uppgift a. Ange speciellt hur förgreningar ska ske. Gör en förgrening utifrån lösningen i uppgift a. (Lös dock inte färdigt problemet.) (2p)

c) Bonns turistbyrå bestämmer sig för att asfaltera alla vägar mellan museerna. Asfaltsmaskinen går långsamt och är ett stort trafikhinder (även när den inte asfalterar), så man vill att maskinen kör så kort sträcka som möjligt. Maskinen står i ett garage vid nod 1, och ska återvända dit när alla gator är asfalterade. Finn bästa rundturen för maskinen. (3p)

Uppgift 2

Stadsplanerarna i Bonn åker på studieresa till Linköping, och blir mycket imponerade av det omfattande bruket av enkelriktningar i stadens centrum. Man vill därför göra likadant i Bonns centrum. Följande riktade graf visar en plan för hur man vill enkelrikta gatorna mellan Bonns museer. Bågkoefficienterna anger avstånd.



a) Det visar sig att bilturister ofta ankommer till nod 1 (från en större trafikled). Därför funderar planerarna på hur långt det är från nod 1 till varje annan nod. (Varje bil kör från nod 1 närmaste vägen till ett av museerna, och vi tar inte hänsyn till vad de gör efter det.)

Hjälp stadsplaneringskontoret i Bonn att finna avståndet från nod 1 till varje annan nod med hjälp av en billigaste vägmetod. (3p)

b) Man kan tillåta en ändring av *en* enkelriktning, dvs. den tillåtna riktningen på en gata kan vändas. Vilken av bågarna som ansluter till nod 1 skulle du välja? Motivera med nodpriser från lösningen i uppgift a. (2p)

c) Ibland blir det fullständigt stopp i trafiken på någon gata, och man måste ta en annan väg. Då kan man vara intresserad av hur många olika vägar det finns mellan två punkter. (Med olika vägar menas att de inte får använda samma gata/båge. De får dock passera samma korsning/nod.) Beskriv hur man skulle kunna ta reda på det med hjälp av en maxflödesmetod. (Ledning: En enhets flöde ger en väg. Använd kapacitet ett.) Använd den beskrivna tekniken för att ta reda på hur många olika vägar det finns från nod 5 till nod 4. (3p)

Uppgift 3

Företaget Combino AB köper in tänger av olika typer och kombinerar ihop dem i olika tångsatser, som sedan säljs med bra vinst. Man har nu köpt in 200 st plattänger, 250 st avbitartänger samt 280 st hovtänger. Man funderar på att sätta ihop dessa till tre olika satser, där sats 1 har en plattång, två avbitartänger och en hovtång, sats 2 har en plattång och två avbitartänger, och sats 3 har en plattång och 2 hovtänger. Vinsten per sats är 5 kr för sats 1, 4 kr för sats 2 och 4 kr för sats 3. Frågan är helt enkelt hur många satser man ska göra av varje sort, för att maximera vinsten.

Man sätter upp en linjär optimeringsmodell, där x_j är antalet satser av typ j, för $j = 1, 2, 3$. Vinsten blir $5x_1 + 4x_2 + 4x_3$. De tre tångsorterna ger bivillkoren $x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$, $2x_1 + 2x_2 \leq 250$, $x_1 + 2x_3 \leq 280$, samt givetvis $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ och $x_3 \geq 0$.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt om några tänger blir över. (3p)

b) Man kan skaffa ytterligare 10 tänger av valfri sort. Vilken ska man välja för att öka vinsten så mycket som möjligt? (Ledning: Inga skuggpriser ändras av denna ändring.) (1p)

c) Formulera LP-dualen till problemet ovan och ange optimal duallösning. (2p)

Uppgift 4

Betrakta problemet i uppgift 3, med ändringen att man har bestämt att sats 2 inte ska göras, dvs. x_2 har fixerats till noll. Man bestämmer sig också för att antalet satser ska vara i hela hundratal. Genom att dividera högerleden med 100 fås ett normalt heltalsproblem.

Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. (Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt.) (3p)

Uppgift 5

Fyra målare ska måla fyra hus. Målarna har olika erfarenhet och målar med olika hastighet. Nedanstående matris anger hur lång tid det tar för de olika målarna (raderna) att måla de olika husen (kolumnerna). Man har bestämt att varje målare ska måla ett hus (och alla husen ska bli målade en gång) och vill minimera tidsåtgången, dvs. summan av tiderna.

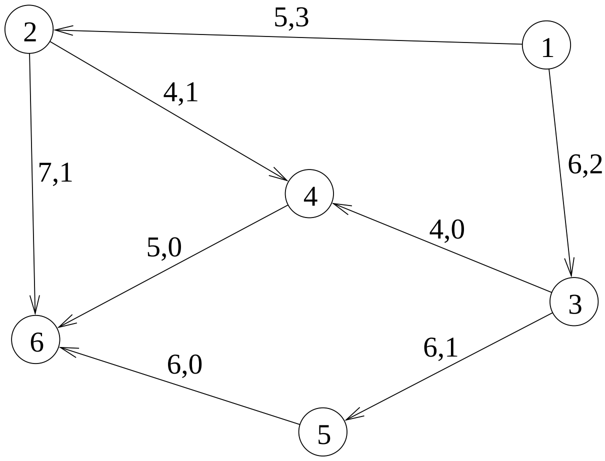
$$C = \begin{pmatrix} 205 & 294 & 204 & 200 \\ 320 & 392 & 324 & 320 \\ 198 & 288 & 200 & 200 \\ 230 & 291 & 234 & 232 \end{pmatrix}$$

a) Finn den bästa tillordningen av målare till hus med hjälp av den ungerska metoden. (2p)

b) En målare är betydligt långsammare än de andra. Hur kan man se det i lösningen till problemet? (Ledning: Se duallösningen.) Kan man se någon motsvarande skillnad när det gäller hus? (Att bara titta på ursprungliga C ger inga poäng.) (2p)

Uppgift 6

I nedanstående graf representerar noderna olika hamnar runt om i världen, och bågarna är möjliga fartygsrutter mellan dem. Bågarna är riktade på grund av strömmar och andra yttre omständigheter. Man har nu fem fartyg i nod 1 och ska skicka ett till varje annan nod. Ett fartyg inklusive besättning kostar en massa pengar per dag, och man vill därför minimera totalt antal dagar fartygen måste färdas. Man vill inte skicka mer än fyra fartyg samma väg (dvs. på samma båge). På bågarna står antal dagar etappen tar (dvs. kostnad) samt hur många fartyg som ska gå där i en preliminär plan (dvs. flöde).



a) Använd simplexteknik för nätverk för att visa att den föreslagna lösningen verkligen är den som minimerar den totala tiden. (2p)

b) Man funderar på att anlägga en direktrutt från nod 4 till nod 5. Hur många dagar får den högst ta, för att man ska tjäna på att använda den? (Ledning: Nodpriser!) (1p)

c) Det visar sig att El Niño är ovanligt stark i år (vilket påverkar både vind och strömmar), så färden från hamn 3 till hamn 4 tar bara två dagar (istället för fyra). Finn den nya optimallösningen (med simplexmetoden för nätverk). Starta med lösningen i uppgift a. Hur mycket tjänar man på denna förändring? (Ta ej med nya bågen från uppgift b.) (3p)

d) Det visar sig att hamn 5 och 6 kan dela på ett fartyg, så man behöver bara skicka ett fartyg till hamn 5 eller hamn 6. Modifiera problemet (nätverket) så att detta problem kan lösas med simplexmetoden för nätverk. (1p)

Uppgift 7

Albert och Herbert ska starta en firma som tillverkar cement. Man funderar på vilken blandning av finfördelad kalksten och lera som är bäst. Låt x_1 vara mängden kalksten (i kg) och x_2 mängden lera (i kg) i ett kg cement. Herbert räknar på ett omständligt sätt ut att den optimala blandningen skulle fås av att minimera $f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 4x_2$.

Albert påpekar att minimum till denna funktion skulle ge en blandning på mer än ett kg, och vill att man ska ta med ett bivillkor som säger $x_1 + x_2 \leq 1$. "Ska det inte vara $x_1+x_2 = 1$?" frågar Herbert, varvid Albert påpekar att det vore en bra affär att sälja mindre än ett kg för samma pris som ett kg. Herbert accepterar (med viss osäkerhet) denna logik, men påpekar att man inte får glömma bivillkoren $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

Albert och Herbert är överens om att bara kalksten ($x_1 = 1$ och $x_2 = 0$) eller bara lera ($x_1 = 0$ och $x_2 = 1$) inte kan vara bra lösningar, av flera skäl. Verifiera med hjälp av KKT-villkoren att dessa lösningar inte är optimala. Spelar det någon roll om man använder $x_1 + x_2 \leq 1$ eller $x_1 + x_2 = 1$? (4p)