Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	28 oktober 2013
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Ingbritt och Teodor ska göra päronmos. De har två kg päron, och tittar i olika recept. Man ska tillsätta vatten och socker, men olika mängder anges. De vill därför använda optimering för att bestämma de bästa mängderna av tillsatserna.

Efter mycket funderande och diskuterande kommer de fram till en olinjär funktion som på ett godtagbart sätt beskriver den smakupplevelse som de vill maximera. De skriver om problemet till ett minimeringsproblem, för de är mer vana vid det.

$$\min f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2,$$

där x_1 står för antal dl vatten och x_2 för antal dl socker som ska tillsättas.

De sätter upp följande begränsningar. Den totala mängden av vatten och socker får inte överskrida 9 dl. Mängden vatten inte får vara större än mängden socker men inte mindre än halva mängden socker. Detta ger följande bivillkor:
$x_1 + x_2 \leq 9$, $x_1 \leq x_2$, $x_1 \geq 0.5x_2$.

a) Kontrollera huruvida följande punkter uppfyller KKT-villkoren.
$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Är någon av punkterna optimal? (Ledning: En matris av formen $\begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K+\delta \end{pmatrix}$ där $K > 0$ och $\delta > 0$ är positivt definit.) (4p)

b) Antag att målfunktionen är okänd. I origo är fyra bivillkor aktiva, om man räknar med $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$. Vilka två av dessa fyra bör man använda i KKT-villkoren? (Dvs. vilka två bevisar bäst optimalitet.) Motivera. (2p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. Ingbritt och Teodor ändrar målfunktionen till en linjär: maximera $4x_1 + 2x_2$. (De gillar både vatten och socker.) Bivillkoren är desamma som i uppgift 1.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange lösning i klartext. (3p)

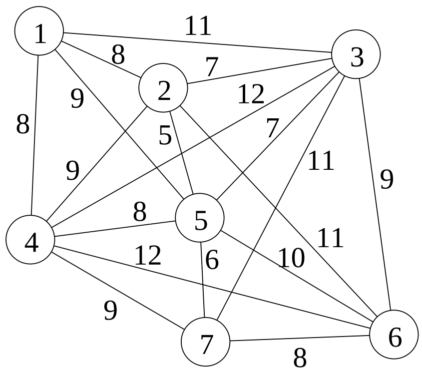
b) Hur mycket skulle målfunktionsvärdet ökas om de tillät 1 dl mer tillsats av vatten plus socker? (Ledning: Använd skuggpris.) (1p)

c) Antag att man skulle kunna blanda i lite av en annan vätska. Det först bivillkoret säger nu att summan av alla tre tillsatserna ska vara högst 9 dl. Den nya vätskan ingår inte i något annat bivillkor. Vilken heltalig målfunktionskoefficient måste denna vätska minst ha för att komma med i den optimala lösningen? (1p)

Uppgift 3

Johannes med familj ska på Allhelgonadagen besöka alla sina släktingars gravar för att sätta blommor och ljus på dem. Gravarna ligger lite oregelbundet utspridda, så han vet inte riktigt hur han ska gå. Gammelmormor Edit har lite svårt att gå, så han vill inte gå onödigt långt. Han prickar in varje grav på ett papper, och räknar ut hur långt det är att gå mellan dem.

En kväll när han inte har något annat att göra, matar han in alla avstånd på sin mobil, och börjar sedan leta efter en app (ett program) som kan hitta bästa vägen runt. Han vill alltså minimera avståndet han ska gå, och måste besöka varje grav. Nedan ges grafen, med gravar som noder och bågarna märkta med avståndet. Han vill starta och sluta i nod 1.



a) Vad ska han söka efter, dvs. vilket (känt) optimeringsproblem är detta? Är det sannolikt att han hittar en app som ger optimal lösning? (Motivera.) (1p)

b) Antag att han inte hittar en lämplig app, och börjar fundera på att hitta en lösning för hand. Föreslå en lämplig heuristik. Använd denna heuristik för att få en tillåten lösning till exemplet ovan. (2p)

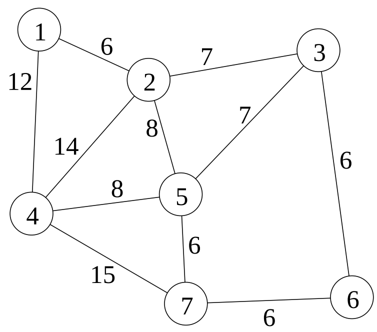
c) Johannes funderar på hur bra lösningen han hittade i uppgift b är. Föreslå en relaxation av problemet ovan, och använd den för att få en optimistisk uppskattning att jämföra med. Gör jämförelsen, dvs. ange hur långt ifrån optimum hans lösning är (i värsta fall). (3p)

Uppgift 4

Inför vinterhalkan vill man förbereda den sandning som ska ske när den första halkan sätter in. Nu vill man titta på cykelvägarna mellan Ryd och Campus Valla på Linköpings universitet. På dessa vägar räcker det att köra en gång när man sandar, och man kan köra åt vilket håll som helst, dvs. grafen kan anses oriktad.

a) Vilket (känt) optimeringsproblem är det att finna den kortaste rundturen så att alla vägar blir sandade? Finns det en polynomisk optimerande lösningsmetod för detta problem? (1p)

b) Finn en optimal lösning till problemet i nedanstående *mycket* förenklade graf. Finns det någon lösning där man inte behöver köra på någon redan sandad väg? Man vill starta och sluta i nod 1. (3p)



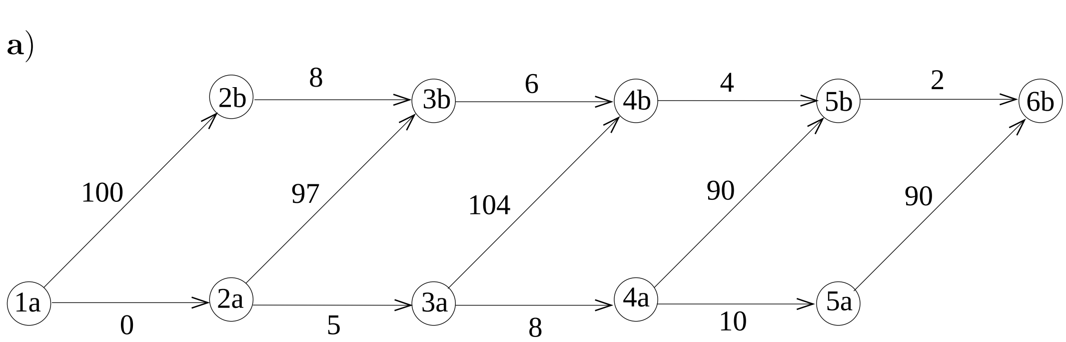
Uppgift 5

Ingbritt har just köpt en Porsche och funderar på när hon ska sätta på dubbdäcken. Hon gör det själv, men det är ganska jobbigt, och tar ett par timmar. Hon har bara tid att göra detta på söndagar, så om hon inte byter en viss söndag, får hon köra en vecka till med samma däck.

Hon vill nu gärna hitta ett sätt att finna en optimal lösning till detta problem. För att få olika besvär och risker att bli jämförbara, räknar hon om allt till kostnader, och målet är att minimera de totala kostnaderna. Att byta däcken innebär en viss kostnad, och denna kan bero på när det sker, eftersom hon har olika mycket att göra på olika söndagar.

Att köra med dubbdäck innebär lite högre bensinkostnader samt en något ökad olycksrisk vid sommarväglag. Att köra med sommardäck innebär högre risk för olyckor vid vinterväglag. Ingbritt har fått tag i en långsiktig väderprognos som hjälper till att bedöma riskerna för vinterväglag. Under en viss period är det olagligt att köra med sommardäck om det skulle vara isigt på gatorna, så har hon inte bytt då, kan hon riskera böter. Ingbritt har nu lyckats beräkna alla kostnader för varje vecka.

a)



I ovanstående nätverk har Ingbritt ritat in de möjligheter hon har under november, med ett steg för varje vecka. Den undre nivån (med nodnamn med a) motsvarar sommardäck och den övre (med nodnamn med b) motsvarar vinterdäck. På bågarna står de kostnader Ingbritt har beräknat. Hon börjar (i nod 1a) med sommardäck, och slutar (i nod 6b) med vinterdäck. (Under denna period är det aldrig olagligt att köra med sommardäck, så några böter finns ej med i kostnaderna.)

Ange en lämplig (känd) metod för att finna den bästa lösningen, och använd den för att lösa problemet. Beskriv den bästa lösningen i ord. (3p)

b) Beskriv principiellt hur följande saker kan hanteras genom att förändra grafen. Hon vill planera ett helt år. Hon kan som ett tredje alternativ använda Teodors dubbfria vinterdäck. (3p)

Uppgift 6

Pärnsons AB äger ett flertal päronodlingar på olika platser i Sverige. Man ska nu skörda, och funderar på vart man ska skicka päronen. Det finns flera syltfabriker att välja på. Pärnsons har gjort en bedömning av hur mycket päron man kommer att skörda på de olika odlingarna. Genom diskussion med de olika fabrikerna har man enats om vilka mängder som ska levereras till de olika platserna. Den enda frågan som nu återstår är vilka päron som ska levereras till vilka platser, dvs. hur päronen ska skickas. Från en karta på nätet kan man läsa ut hur långt det är mellan de olika platserna. Man antar att kostnaden för att skicka päron på en viss länk är proportionell mot mängden päron som skickas. (Den linjära koefficienten beror givetvis på hur lång länken är, men det har beräknats i förväg.)

a) Vilket känt optimeringsproblem är det att hitta det billigaste sättet att skicka efterfrågade mängder päron? (Antag för enkelhets skull att alla päron är av samma sort.) (1p)

b) Lös följande mycket förenklade problem, där vi har tre päronodlingar och två fabriker och päronen skickas direkt från odling till fabrik med linjära transportkostnader med följande koefficienter, $C = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 25 & 23 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}$, där c_{ij} är kostnaden (per ton) att skicka från odling i till fabrik j. Alla bågar har övre gräns 100 ton. Tillgången vid odlingarna är 20, 9 och 7 ton päron och de två fabrikerna ska ta emot 15 resp. 21 ton. En möjlig lösning är att skicka 20 ton från odling 1 till fabrik 2, 9 ton från odling 2 till fabrik 1, 6 ton från odling 3 till fabrik 1 och 1 ton från odling 3 till fabrik 2, Starta från denna lösning. (3p)

c) Pärnsons skriver ett nytt avtal med transportfirman Bräng. I det avtalet lovar Bräng att utföra alla transporter till ett fast pris (dvs. oberoende av vikt) för varje relation mellan odling och fabrik. Avtalet innehåller även en passus om att varje fabrik ska få leveranser från endast en odling. Eftersom man har tre odlingar och bara två fabriker, bestämmer sig Pärnsons för att vänta med en av odlingarna. Man vill dock inte bestämma vilken odling man inte ska leverera från, utan vill välja den som gör att totalkostnaden minimeras.

Kostnaderna för att leverera mellan de olika platserna är samma som i föregående uppgift (men multiplicerade med 10). För att hantera den odling som inte ska levereras, fyller man på kostnadsmatrisen med en kolumn nollor. Man får alltså följande kostnadsmatris, $C = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 0 \\ 25 & 23 & 0 \\ 18 & 17 & 0 \end{pmatrix}$, där kostnaden c_{ij} uppstår om Bräng ska leverera hela skörden från odling i till fabrik j.

Vilket känt optimeringsproblem är det att finna billigaste sättet att sköta leveranserna, dvs. att finna billigaste kopplingen mellan odlingar och fabriker?

Förklara hur och varför den tredje kolumnen med nollor korrekt modellerar problemet med att välja vilken odling som inte ska utbyttjas.

Lös problemet med den lämpligaste metoden. Vilka fabriker ska de olika odlingarna leverera till, och vilken odling får vänta? (4p)

Uppgift 7

Pärnsons har ett antal fruktodlingar, och funderar på hur mycket man ska plocka i morgon. Varje fruktodling har ett antal träd, och frågan är hur många träd man ska plocka av i morgon. Att "plocka av" ett träd innebär att man tar ner alla frukter på det trädet. Alternativt tar man inget från det trädet. Annars skulle det bli svårt att hålla redan på vad man gjort och inte gjort. Så frågan är hur många träd på varje odlingsplats man ska plocka av i morgon. De andra får stå orörda några dagar till.

Vi antar att alla träd på en plats är lika och att alla päron är av samma sort. Att plocka av ett träd på plats j ger en viss vinst, c_j (kr), och en viss mängd päron, a_j (kg). Man kan inte plocka mer än b kg i morgon, på grund av begränsad lastkapacitet hos traktorn som tar hand om skörden. Man har krav på att plocka minst l_j och högst u_j träd på plats j.

a) Formulera problemet att maximera vinsten som ett linjärt heltalsproblem. (1p)

b) Lös följande förenklade exempel med bara två odlingar. $c_1 = 7$, $c_2 = 10$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b = 12$, $l_1 = 2$, $u_1 = 8$, $l_2 = 1$, $u_2 = 7$. (Målfunktionen är skriven i sorten 100 kr och bivillkoret är skrivet i sorten 100 kg.) Använd Land-Doig-Dakins metod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange optimal lösning i klartext. (3p)

c) Antag att man inte kräver plockning av hela träd, utan tillåter plockning av delar av träd. Vad blir optimallösningen då? (Resultat från deluppgift b får användas.) Hur mycket mer skulle man tjäna? (1p)