Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

Datum:	8 januari 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firman Bygg&Bult i Mjölby producerar skruvar, spikar och bultar. Man ska nu bestämma hur mycket av varje sort man ska göra i morgon. De råvaror som man har begränsad tillgång av är järn och zink. Genom att låta x_1 ange hur många skruvar (i tusental), x_2 hur många spikar (i tusental) och x_3 hur många bultar (i tusental) man ska göra, kan man sätta upp följande LP-modell för att maximera vinsten för morgondagen. (Man förutsätter att en icke heltalig lösning går att avrunda utan större fel.) Bivillkor 1 anger begränsad mängd av järn och har sorten 100 kg och bivillkor 2 anger begränsad mängd av zink och har sorten 10 kg. (Man har alltså 600 kg järn och 80 kg zink.) Målfunktionen har sorten 100 kr. (Vinsten är alltså 0.6 kr per skruv, och 0.5 kr per spik eller bult.)

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 6x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 & (1) \\
 & & 2x_1 & & & + & x_3 & \leq & 8 & (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange lösning i klartext. (3p)

b) Man upptäcker att optimallösningen bara innehåller produktion av två sorter, inte alla tre. Är detta ett förväntat resultat? Varför (inte)? (1p)

c) Betrakta optimallösningen i uppgift a. Man får möjlighet att köpa in ytterligare 1 kg av antingen järn eller zink. (Observera sorterna på högerleden.) Vilket är mest lönsamt att välja, och hur mycket skulle vinsten öka av det? (Ledning: Optimal baslösning ändras inte av denna ändring.) (1p)

d) Betrakta optimallösningen i uppgift a. Man funderar på att införa en ny produkt, "sprult", som skulle ge vinsten 0.55 kr per enhet, och som innehåller precis 10 ggr så mycket järn som zink. Hur mycket järn får sprulten kräva per enhet för att det ska bli lönsamt att tillverka den? (Ledning: Beakta noga sorterna i ovanstående problem.) (1p)

e) Formulera LP-dualen till problemet i uppgift a, och lös den grafiskt. Verifiera svaret till uppgift d grafiskt. (3p)

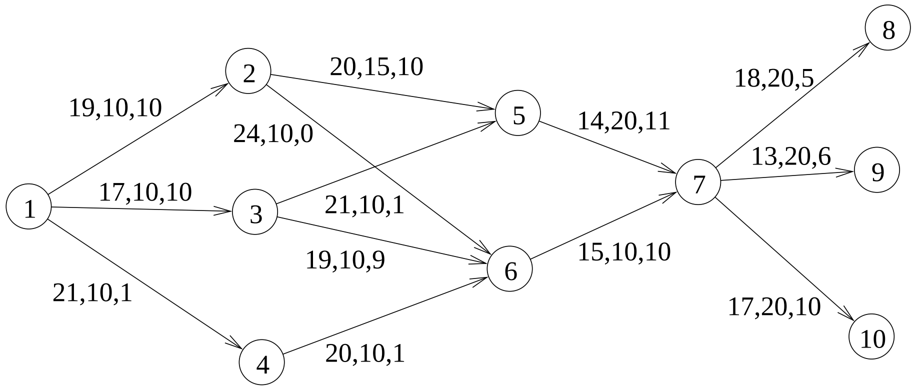
f) Sätt upp KKT-villkoren för problemet ovan. Undersök huruvida följande punkter är KKT-punkter. $x^{(1)} = (0,0,0)$, $x^{(2)} = (2,2,2)$, $x^{(3)} = (1,1,1)$, $x^{(4)} = (2,2,1)$. (3p)

Uppgift 2

Nedanstående nätverk representerar produktionsflödet för spadar i Bygg&Bults fabrik i Mjölby. Bågarna motsvarar olika maskiner eller processer, och bågkoefficienterna anger i tur och ordning kostnad per enhet (kostnaden antas vara linjär), kapacitet (övre gräns för flödet) samt flödet i en föreslagen lösning. Spadarna i obehandlad form anländer till nod 1. Därefter finns det tre olika ytbehandlingsmaskiner för skaftet, representerade av de tre bågarna till nod 2, 3 och 4. Exempelvis har den tredje maskinen, motsvarande båge (1,4), en kostnadskoefficient på 21 och en kapacitet på 10, samt flöde 1 i den föreslagna lösningen.

Bågarna från noderna 2, 3 och 4 till 5 och 6 motsvarar olika bladslipningsmaskiner, och bågarna från 5 och 6 till 7 motsvarar två förpackningsmaskiner. Slutligen representerar bågarna ut från nod 7 transporter till Kisa (nod 8), Boxholm (nod 9) och Motala (nod 10).

Man har fått beställningar på 5 spadar till Kisa, 6 spadar till Boxholm och 10 spadar till Motala. Man har därför köpt in 21 spadar (vilka dyker upp i nod 1).



a) Den föreslagna lösningen är optimallösningen till ett linjärt minkostnadsflödesproblem. Det visar sig dock att kostnaden på båge (6,7) inte ska vara 15, utan 17. Finn (med simplexmetoden för nätverk) en ny optimallösning till problemet. (3p)

b) Man funderar på att införa en möjlighet till direktleverans från nod 6 till Motala (nod 10) till en kostnad av 25 per enhet. Skulle detta innebära att totalkostnaden minskar? (Lös ej om.) (1p)

c) Finn det billigaste sättet för en enhet att komma från nod 1 till nod 9. Använd en metod som ger nodpriser för alla noder. (2p)

d) Antag att man kan ändra kostnaden på båge (5,7). Ange ett intervall för den bågkostnaden inom vilket den billigaste vägen i uppgift d inte ändras. (1p)

e) Finn det maximala flöde som kan skickas från nod 1 till nod 7. Starta från det angivna flödet i nätverket ovan. (Var tydlig med alla steg i metoden.) Ange minsnitt. (3p)

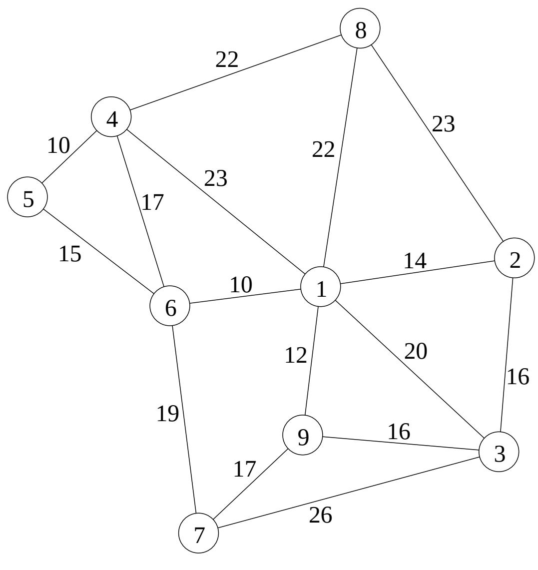
Uppgift 3

Bygg&Bult har färdigställt åtta större jordbruksmaskiner, och ska skicka dem med lastbil till Stockholm. Maskinerna väger 10, 12, 5, 13, 7, 8, 6 och 13 ton. Lastbilarna kan inte ta mer än 20 ton per bil. Den stora frågan är hur många lastbilar som behövs.

Finn en lösning med en känd heuristik (dvs. en som finns i kursboken). Bedöm lösningen kvalitet genom att finna en undre gräns för hur många lastbilar som kan behövas. (3p)

Uppgift 4

Malte, säljare för Bygg&Bult i Mjölby, planerar sin rundtur till potentiella kunder. Han planerar att täcka Östergötland på en dag, och nedanstående graf visar de orter (noder) han vill besöka, samt de vägar (bågar) han kan tänka sig använda. På bågarna står tiden det tar att köra sträckan (i minuter, Malte har en Porsche). (Han har valt bort vissa småorter och vissa småvägar.)



a) Malte vill starta i Mjölby, nod 6, och köra en rundtur som besöker varje ort exakt en gång, och han vill minimera körtiden (för att få mer tid till att prata med kunderna). Ange vilket optimeringsproblem detta är, och finn en skaplig lösning med en känd heuristik. (2p)

b) Malte undrar hur bra lösningen han hittade är. Föreslå en relaxation av problemet ovan, och använd den för att få en optimistisk uppskattning att jämföra med, samt ange hur långt ifrån optimum hans lösning är (i värsta fall). (2p)

c) Östra Spårvägar AB funderar på att bygga upp ett helt nytt smalspårigt spårsystem för pendeltrafik. Man vill förbinda alla orterna i Östergötland som finns med på Maltes karta, och tänker dra spåren längs med existerande vägar. Man använder därför bågarna på hans karta som möjliga spår. Man vill givetvis minimera uppbyggnadskostnaden, som är proportionell mot avståndet mellan orterna, så man använder bågkoefficienterna på Maltes karta. Vilket känt optimeringsproblem är det man vill lösa? Finn en optimallösning med en effektiv metod. (3p)

d) Som förberedelse till uppgift c vill Östra Spårvägar inspektera samtliga möjliga spårdragningar. Man tittar på kartan och försöker hitta en rundtur (som börjat och slutar i Norrköping, nod 2) som passerar varje båge exakt en gång. Kommer man att hitta en sådan tur? Varför (inte)? (1p)

e) Utgå från uppgift d. Man inser att det inte gör så mycket om man passerar en redan inspekterad länk en extra gång, men vill minimera tiden rudturen tar. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med känd metod. Vilka sträckor måste man köra två gånger? (2p)

Uppgift 5

Bygg&Bult ska starta upp produktion av ännu större jordbruksmaskiner, och har till att börja med två sorter att välja på, skördetröskor och traktorer. En skördetröska inbringar vinsten 200 000 kr och en traktor hälften av det. Man har bara plats för tre fordon i produktionshallen, och har som krav att minst en av varje sort ska tillverkas. Dessutom ger begränsad tillgång till vissa detaljer följande två bivillkor: $2x_1 + 4x_2 \leq 8$ och $3x_1 + 2x_2 \leq 6$, där x_1 står för antal tillverkade skördetröskor och x_2 står för antal tillverkade traktorer.

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange optimal lösning i klartext. (3p)

b) Antag istället att det räcker att ta hänsyn till *ett* av de två bivillkoren $2x_1 + 4x_2 \leq 8$ och $3x_1 + 2x_2 \leq 6$. Rita det tillåtna området. Identifiera grafiskt den bästa lösningen. Formulera en linjär heltalsmodell för problemet. (2p)