Matematiska institutionen
Optimeringslära

# TENTAMEN

## TAOP86/TEN 1
## KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

| | |
|---|---|
| **Datum:** | 29 augusti 2014 |
| **Tid:** | 14.00-19.00 |
| **Hjälpmedel:** | Miniräknare |
| | Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* |
| | Anteckningar i boken får förekomma. |
| **Antal uppgifter:** | 6 |
| **Antal sidor:** | 5 |
| | Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. |
| | Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng. |
| **Examinator:** | Kaj Holmberg |
| **Jourhavande lärare:** | Kaj Holmberg, tel 013-282867 |

**Resultat meddelas per e-post**

## Tentamensinstruktioner

### <u>När Du löser uppgifterna</u>

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.*
*Motivera alla påståenden du gör.*
*Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*
*Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

### <u>Vid skrivningens slut</u>

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.*
*Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.*
*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

**Uppgift 1**

Firma Vallablad tillverkar papper och man håller på att ta fram en ny papperskvalitet genom att blanda råvarorna ved och halm. Papprets egenskaper påverkas av hur mycket man använder av de olika råvarorna. Låt $x_j$ vara mängden (i g) av råvara $j$ som tillsätts i pappersmassan motsvarande ett pappersark. ($j = 1$ står för ved och $j = 2$ för halm.) Det finns flera egenskaper hos pappret som man är intresserad av, nämligen ythårdhet (Y), blankhet (B), mjukhet (M), porositet (P) och tyngd (T). Man tar fram följande uttryck för hur de olika egenskaperna beror på råvarorna.
$Y = 3x_1 + 5x_2$, $B = 3 + 2x_1^2 - x_2$, $M = 5 - x_1 + x_2^2$, $P = x_1 + 3x_2$, $T = x_1 + x_2$.
Vallablad kan tänka sig flera olika optimeringsproblem för att finna den "bästa" blandningen.

Det första problemet, som de kallar P1, är att maximera ythårdheten plus blankheten ($Y+B$), då mjukheten inte får överstiga 10 och tyngden inte får överstiga 3. (Här bryr man sig inte om porositeten.)

Det andra problemet, som de kallar P2, är att maximera mjukheten, då ythårdheten inte får understiga 4 och tyngden inte får överstiga 4. (Här bryr man sig inte om blankheten eller porositeten.)

Det tredje problemet, som de kallar P3, är att maximera ythårdheten då porositeten inte får överstiga 3 och tyngden inte får överstiga 5. (Här bryr man sig inte om blankheten eller mjukheten.)

Det fjärde problemet, som de kallar P4, är att minimera mjukheten, då ythårdheten inte får understiga 3, porositeten inte får överstiga 2 och tyngden inte får överstiga 3. (Här bryr man sig inte om blankheten.)

**a**) Lös problemet P3 med simplexmetoden. Ange optimallösning samt värdet på de olika egenskaperna. Illustrera grafiskt. Gick metoden den kortaste vägen? (4p)

**b**) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Hur mycket skulle det optimala målfunktionsvärdet öka om porositet upp till 4 tillåts? (1p)

**c**) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Läs ut $B^{-1}$ ur optimaltablån och beräkna hur mycket gränsen för porositeten kan öka utan att den optimala baslösningen ändras. (2p)

**d**) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Hur mycket skulle det optimala målfunktionsvärdet öka om koefficienten för halm i ythårdheten ökade från 5 till 6? För hur stora ökningar gäller samma ökningstakt? Vad händer (principiellt) för större ökningar? (2p)

**e**) Formulera LP-dualen till problem P3. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift b. Visa att duallösningen är tillåten i dualen, samt att starka dualsatsen är uppfylld. (3p)

**f**) Utgå från optimallösningen i uppgift a (och e). En tredje möjlig råvara är gamla tidningar. Utvärdera införandet av denna möjlighet i P3. Om $x_3$ är mängden (i g) av gamla tidningar, fås $Y = 3x_1+5x_2+2x_3$, $P = x_1+3x_2+x_3$, $T = x_1+x_2+x_3$. Blir lösningen bättre av användande av gamla tidningar? (1p)

**g**) Är optimallösningen till P3 tillåten i P1, P2 och P4? Är den en extrempunkt till det tillåtna området till P1, P2, P3 och P4? (1p)

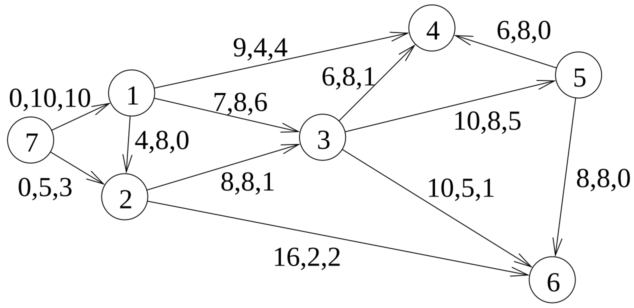
## Uppgift 2

Betrakta problem P1 i uppgift 1. (Tips: Gör gärna om till ett minimeringsproblem.) Vallablad är intresserad av tre olika lösningar, nämligen:
A: Inget ved, 3 g halm.
B: 3 g ved, ingen halm.
C: Inget ved, ingen halm.

Kontrollera huruvida dessa lösningar uppfyller KKT-villkoren. Vad kan man säga om ev. optimalitet hos punkterna? Illustrera gärna grafiskt. (3p)

## Uppgift 3

Vallablad ska leverera stora buntar av papper. Man har ett lager i Mjärdevi (nod 1 i följande graf) och ett lager i Valla (nod 2). Kunderna är lokaliserade i nod 4, 5 och 6. Man kan lasta om papper vid alla noder. Just nu har man 10 buntar i nod 1 och 5 bunter i nod 2. Efterfrågan är 5 i nod 4, 5 i nod 5 och 3 i nod 6. Nedanstående nätverk anger möjliga transportvägar, med följande data på bågarna: kostnad per bunt, övre gräns, flöde i en föreslagen lösning (i denna ordning).




Eftersom total tillgång är 15, medan total efterfrågan är 13, har man inför nod 7 som en superkälla, med övre gränser 10 och 5 på bågarna till nod 1 och 2. Nod

7 är då källa av styrka 13 och nod 1 och 2 mellannoder.

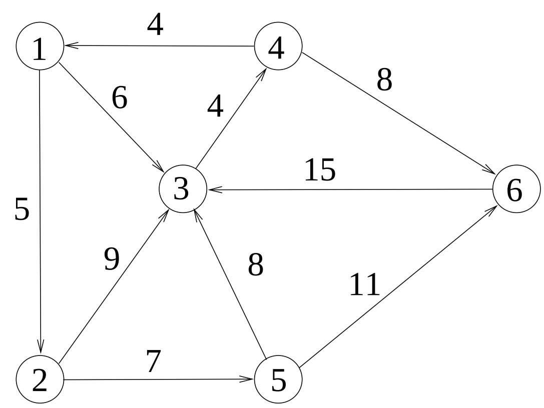
**a**) Är det angivna flödet i grafen en optimallösning till minkostnadsflödesproblemet? Motivera med simpexteknik för nätverk. (3p)

**b**) En ny väg har byggts, vilket sänker kostnaden på bågen (3,6) från 10 till 7. Starta med lösningen i uppgift a och finn ett ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. (2p)

**c**) Det visar sig att vägbygget i uppgift b blir försenat, så kostnadssäkningen blir inte av. Utgå därför från lösningen i uppgift a. Istället förhandlar man med en annan transportör som kan ta varor från nod 4 till nod 6. Vilket pris per bunt kan man acceptera om totalkostnaden ska sänkas? (1p)

## Uppgift 4

Följande riktade nätverk med bågkostnader representerar centrum i staden Finköping. Som synes är alla gator enkelriktade. Bågkoefficienterna anger den tid (i minuter) det tar att köra sträckan.




**a**) Kan man komma till alla noder från nod 1? Finn svaret på frågan genom att finna billigaste väg från nod 1 till alla andra noder med lämplig (namngiven) metod. Ange hur lång tid det tar att komma till varje nod. (3p)

**b**) Man funderar på att vända enkelriktningen på båge (5,3) så att man kan åka åt andra hållet. Det kan ses som att ta bort båge (5,3) och lägga till båge (3,5), med samma kostnad. Skälet är att man vill förkorta tiden det tar att åka från nod 1 till nod 5. Kommer man att uppnå detta mål? (Dvs. blir den kortaste vägen från 1 till 5 kortare? Motivera svaret med nodpriser.) (1p)

**c**) Utgå från nätverket ovan (utan ändringen i uppgift b). Anta istället att bågkoefficienterna anger hur många fordon som maximalt kan passera vägsträckan (under en viss tid). Finn det maximala fordonsflödet från nod 1 till nod 6.

(Använd lämplig metod, och visa alla steg i metoden tydligt.) Ange minsnitt. (3p)

**d**) Strunta i riktningarna på bågarna och finn en rundtur som passerar varje nod en gång, och som har en låg (helst minimal) kostnad, dvs. summa av bågkostnader. Använd en valfri heuristik, och beskriv den kort. Finn därefter en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet (med en lämplig metod) och ange hur långt från optimum din lösning maximalt är. (3p)

### Uppgift 5

Vallablad funderar på att investera i nya pappersmaskiner. Det finns två olika sorter man kan köpa. Man vill köpa minst tre maskiner, och frågan är av vilka sorter. Maskinsort 1 kostar 20 miljoner per styck och maskinsort 2 24 miljoner, och man vill minimera de totala inköpskostnaderna. Maskinerna ska stå i den nybyggda hallen i Mjärdevi, och det har visat sig att golvet inte tål mer än 25 ton. En maskin av sort 1 väger 6 ton och en maskin av sort 2 väger 12 ton. Finn en optimallösning med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

### Uppgift 6

Anton, Beatrice, Carl och Doris ska skriva fyra olika procedurer i ett datakod. De är olika snabba på att skriva olika saker, och har därför gjort en bedömning av hur lång tid det skulle ta för varje person att skriva varje procedur. Varje person ska skriva ett procedur (och alla procedurer ska bli skrivna), och man vill bestämma vem som ska göra vad så att den totala tiden minimeras. Tiderna ges (i timmar) i nedanstående matris, där raderna står för personer och kolumnerna för procedurer.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 14 & 8 \\ 9 & 9 & 10 & 7 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

**a**) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning (vem som ska göra vad) samt total tid. (3p)

**b**) Procedur 1 innehåller en oväntad svårighet, så den kommer att ta två timmar mer, för varje person, än i matrisen ovan. (Det betyder att varje siffra i första kolumnen ska ökas med två.) Kommer detta att ändra optimallösningen? Hur mycket ändras det optimala målfunktionsvärdet? Motivera med hjälp av duallösningen. (Lös ej om problemet.) (1p)