Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	24 oktober 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Fusk&Fix AB trycker upp och säljer gamla tentor och kurslitteratur till studenter vid det lokala universitetet. Man har en stor tryckpress och funderar på hur man ska använda den på bästa sätt i två kommande dagar. Givetvis vill man använda optimering, så man formulerar en LP-modell med följande variabler: x_1 är den tid (i sorten dygn) som pressen används till att trycka gamla tentor och x_2 är tiden pressen används till att trycka upp kompendier. Tryckpressen kan gå dygnet runt, men den totala tiden får inte överstiga två dygn.

Om man trycker upp gamla tentor i ett dygn går det åt 300 kg papper och 400 häftklamrar, medan tryckning av kompendier i ett dygn kräver 400 kg papper och 300 häftklamrar. Man vill inte använda mer än 700 kg papper och 900 häftklamrar för de två dygnen. Man bedömer att tryckning av tentor ett dygn skulle ge en vinst på 7000 kr, medan vinsten for ett dygns tryckning av kompendier skulle ge vinsten 8000 kr. Allt detta ger nedanstående LP-modell, där man har förkortat bort en del nollor. (Sorterna är därmed 1000 kr för målfunktionen, dygn för bivillkor 1, 100 kg papper för bivillkor 2 och 100 häftklamrar för bivillkor 3.)

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 7x_1 & + & 8x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & \quad (1) \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 7 & \quad (2) \\
& & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 & \quad (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka resurser som är begränsande. (3p)

b) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Hur mycket skulle det optimala målfunktionsvärdet öka om man hade 1 kg papper mer? (1p)

c) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att duallösningen är tillåten i dualen, samt att starka dualsatsen är uppfylld. (3p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift a. En tredje möjlig produkt är nya (kommande) tentor. Om man trycker nya tentor i ett dygn krävs 400 kg papper och 400 häftklamrar och man får vinsten 7000 kr. Vore det lönsamt att trycka nya tentor? (Svara m.h.a. reducerad kostnad.) (1p)

Uppgift 2

Fusk&Fix funderar på var man ska placera luftutsuget i rummet där man blandar kemikalier. Man studerar kartan över rummet, sett uppifrån. Rummet är 3 gånger 3 meter. Utsuget borde sitta mitt över själva blandningsmaskinen som står i punkten $x_1 = 3$ och $x_2 = 2$. (Man har valt rummets nedre vänstra hörn som origo, och maskinen står 3 m till höger och 2 m ovanför det.) Tyvärr finns en takutbyggnad som förhindrar det. Man kan bara sätta luftutsuget i punkter där $x_1 + x_2 \leq 3$, dvs. till vänster om och nedanför rummets diagonal. Man bestämmer sig för att minimera ett viktat avstånd till den önskade punkten, och inser att det är enklare att minimera kvadraten av avståndet, vilket ger följande optimeringsmodell.

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$

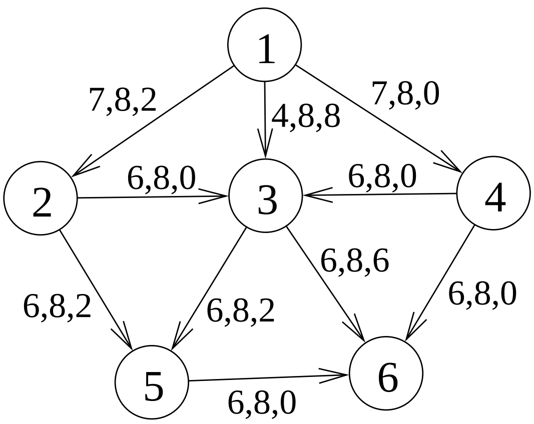
a) Är problemet konvext? (1p)

b) Använd KKT-villkoren för att avgöra om mittpunkten i rummet är den optimala placeringen (vilket man tror). (2p)

c) Antag att det första bivillkoret är aktivt i optimum och de andra inte är det. Lös problemet med KKT-villkoren. Fås optimum? (2p)

Uppgift 3

Fusk&Fix ska snabbt leverera de nytryckta tentorna från sitt lager i nod 1 i nedanstående nätverk. Man har tio buntar med tentor i lagret, och 6 av dem ska till en tentalokal i en närbelägen stad, nod 6, och 4 av dem ska till en annan tentalokal i utkanten av universitetsområdet, nod 5. Nedanstående nätverk anger möjliga transportvägar. På bågarna anges kostnad per bunt, en övre gräns för hur mycket som kan skickas den vägen samt hur mycket man skickade förra gången. Man vill minimera kostnaderna för transporterna.



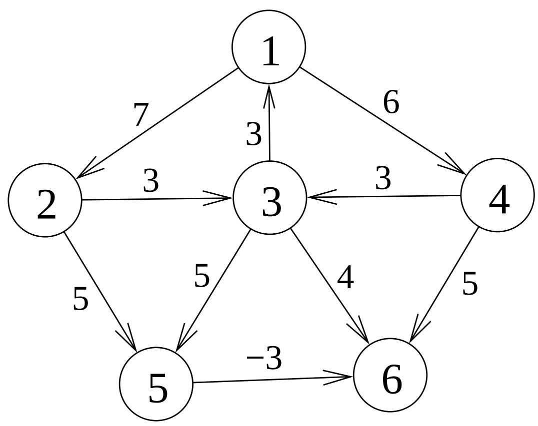
a) Frågan man ställer sig är om det är optimalt att skicka som man gjorde förra gången. Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) En ny väg har byggts, vilket sänker kostnaden på bågen (4,6) från 6 till 5. Starta med lösningen i uppgift a och finn ett ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. (2p)

c) Från ansvarigt håll anses trafiken mellan nod 1 och 3 vara för stor. Man vill installera vägbulor och andra trafikhinder för att minska trafiken på den sträckan, genom att öka kostnaden för att köra den. Var går gränsen för Fusk&Fix, dvs. hur mycket måste kostnaden på båge (1,3) öka för att Fusk&Fix ska ändra sin transportplan? (Man kan utgå från lösningen i uppgift a eller b, men man måste ange vilken.) (1p)

Uppgift 4

Följande riktade nätverk med bågkostnader representerar centrum i staden Fixköping. Som synes är alla gator enkelriktade. Bågkoefficienterna anger upplevd kostnad för att cykla sträckan. (Sträckan 5 - 6 är så vacker att den upplevs som belönande att cykla.)



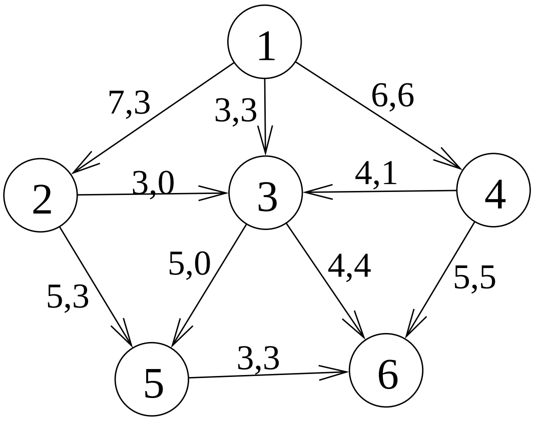
a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 6. Ange metod och motivera metodvalet. (2p)

b) Finn dyraste väg från nod 1 till nod 6. Ange metod och motivera metodvalet. (2p)

c) Utgå från lösningen i uppgift a. För vilka värden på kostnaden på båge (2,3) ingår denna båge i den billigaste vägen från nod 1 till nod 6? (1p)

Uppgift 5

I nedanstående nätverk är bågarna märkta med kapacitet samt flöde. Totalt skickas 12 enheter från nod 1 till nod 6.



a) Är flödet ett maxflöde från nod 1 till nod 6? Bevisa svaret. Ange minsnitt. (1p)

b) Kapaciteten på båge (4,6) ökas från 5 till 6. Utgå från flödet i uppgift a och finn maxflöde från nod 1 till nod 6. (Använd lämplig metod, och visa alla steg i metoden tydligt.) (2p)

Uppgift 6

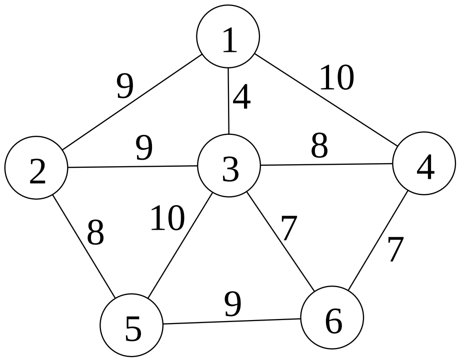
Fusk&Fix funderar på att köpa flera tryckpressar. Det finns två olika sorter man kan köpa. Maskinsort 1 kräver strömförsörjning i form av ett trefas-uttag, medan maskinsort 2 kräver två sådana uttag. Man har nu bara tre stycken, och elnätet i fastigheten klarar inte att installera fler. Maskinsort 1 är 5 m bred, medan maskinsort 2 är 4 m bred, och maskinerna ska stå mot en 10 m lång vägg. Man bedömer att varje maskin av sort 1 skulle ge vinsten 3.4 miljoner under sin livstid, medan en maskin av sort 2 skulle ge 3 miljoner. Man får alltså följande optimeringsmodell.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 34x_1 & + & 30_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 & \\
& & 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 & \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \text{heltal}
\end{array}
$$

Finn en optimallösning med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 7

Följande oriktade nätverk med bågkostnader representerar centrum i staden Fixköping. Bågkoefficienterna anger tid (i minuter) det tar att springa sträckan. Det finns trafikljus i samtliga korsningar (noder), och pga. ett åskväder har alla slutat fungera. För att få dem att fungera igen måste man göra ett enkelt handgrepp i ett trafikljus i varje korsning. Det råder trafikkaos i staden, och alltiallo Petterströmsson ska springa runt och så fort som möjligt laga trafikljusen. Han vill därför finna den kortaste rundtur som besöker alla noder.



a) Finn en bra rundtur åt Petterströmsson med valfri metod. Beskriv dock metoden. (En metod från kursen kan beskrivas kort. En nypåhittad metod kräver en utförlig beskrivning.) (2p)

b) Använd en relaxation av problemet ovan för att få en optimistisk uppskattning att jämföra rundturen med, samt ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (2p)

c) För att undvika en liknande situation i framtiden, tänker man införa ett fjärrstyrningssystem så att allt kan göras från nod 1. Man behöver förbinda alln noder med varandra med en ganska dyr fiberoptisk kabel. Låt kostnaden för en direktförbindelse mellan två noder vara proportionell mot de angivna koefficienterna i grafen. Finn det billigaste sättet att lägga ut den fiberoptiska kabeln så att alla noder kan kommunicera med varandra. (Det gör inget om fibern går via andra noder.) Finn en optimallösning med en effektiv metod. (2p)

d) Petterströmsson får i uppdrag att kontrollera att trafiken flyter bra på alla gator, så han måste finna en rundtur som passerar varje gata minst en gång. Han har lite bråttom, så han får springa, och kan därför använda kostnaderna i grafen ovan. Petterströmsson får rapporter från bekanta att trafiken flyter bra på gatorna (1,4) och (5,6), så han bortser från dessa gator. Finn en optimal rundtur till problemet utan dessa bågar. (2p)

Uppgift 8

De fem polisbilarna i Fixköping är ute och patrullerar i lugn och ro, då plötsligt fem anrop om olyckor på olika platser kommer in samtidigt. Ledningscentralen måste snabbt bestämma vilken bil som ska åka till vilken plats. Varje bil ska åka till en plats, och varje plats måste få en bil. Följande matris anger hur lång tid det skulle ta för varje bil att köra till varje olycksplats. (Raderna motsvarar bilar och kolumnerna platser.)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 12 & 11 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 7 & 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Man bestämmer sig för att minimera summan av körtiderna (det känns rättvist).

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även optimal duallösning. (3p)