Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	30 oktober 2015
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget Prytt&Plätt ska köpa in suddgummin med roligt tryck, som man sedan ska sälja i sina prylaffärer runt om i Sverige. Det finns fyra olika sorter, och man formulerar en optimeringsmodell, där x_j står för hur många hundra suddgummin av sort j man köper in. Man beräknar en uppskattad slutlig vinst för varje sort (per hundratal), och vill maximera den totala vinsten. Man har även två budgetbivillkor, ett för november och ett för december. Dessa bivillkor säger helt enkelt att man har begränsat med pengar i kassan, och inte får utnyttja mer än man har. Att det blir olika bivillkor beror på att intäkterna från försäljningen kommer in vid olika tidpunkter. Bland annat har sort 3 ett trevligt julmotiv, och kommer att sälja bra i november. Man får följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & & & - & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 4 & \quad (1) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & \leq & 6 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Det råder delade meningar om hur många olika sorter det blir optimalt att köpa in. Några tror att det blir alla fyra, några att det bara kan bli tre, och några att det bara kan bli två. Avgör hur det är med den saken genom att hänvisa till egenskaperna hos en optimallösning till ett LP-problem. (Svaret får inte bygga på lösningen i uppgift b.) (1p)

b) Hjälp Prytt&Plätt att bestämma hur mycket man ska köpa in av de olika sorterna genom att lösa LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt total vinst. Blir kassan tom någon av månaderna? (3p)

c) Vad skulle man tjäna på att ha lite mer i kassan i november resp. december? (Ledning: Det handlar om högerleden.) (1p)

d) P&P har räknat fel. Alla koefficienter för x_3 har fel tecken (både i målfunktionen och bivillkoren). Beräkna den reducerade kostnaden för x_3 om alla koefficienter byter tecken, och dra slutsatser. (En ev. ny optimallösning behöver inte beräknas.) (1p)

e) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Lös problemet grafiskt. Kontrollera med resultatet i uppgift b. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. Finn även den duala optimalösningen om sorterna 2 och 3 inte ska köpas in, dvs. om de primala variablerna x_2 och x_3 tas bort. (4p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. Det visar sig att sort 2 och 3 dras tillbaka av miljöskäl, och därför inte finns tillgängliga, och att man bara kan köpa sorterna 1 och 4 i hela hundratal. Formulera det då erhållna heltalsproblemet och lös det med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och total vinst. (3p)

Uppgift 3

Alla suddgummin i uppgift 1 görs av firma Kautschuk Oy. De görs dock inte av latex längre, utan av butylgummi och neoprengummi. För att bestämma den optimala blandningen, formulerar man följande optimeringsproblem, där x_1 står för mängd butylgummi och x_2 för mängden neoprengummi.

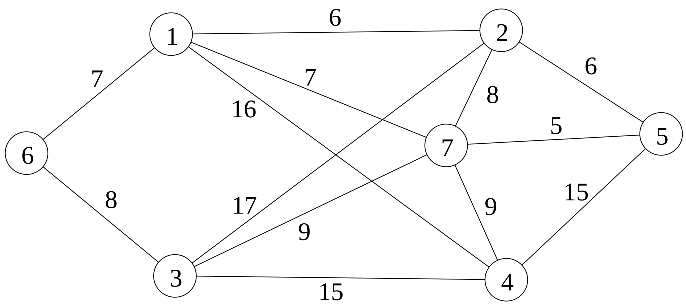
$$
\begin{aligned}
\min f(x) = \quad & 3x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 3x_1x_2 \\
\text{då} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& 0 \leq x_1 \leq 1 \\
& 0 \leq x_2 \leq 4
\end{aligned}
$$

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av punkterna A: (1, 1), B: (2, 2), C: (0, 3) och D: (0.5, 0.5) ger den optimala lösningen. (3p)

b) Rita in eventuella tillåtna förbättringsriktningar i punkterna i uppgift a. (Utnyttja gärna resultat från uppgift a.) (2p)

Uppgift 4

Dagisklassen från dagiset Snöpigan ska plocka svamp. Man har 6 platser där det brukar finnas svamp, och vill gå till alla dessa, och sedan hem igen. Eftersom det kan vara svårt att hålla ihop en flock dagisbarn i skogen, vill man gå den kortaste rundturen. Nedanstående graf anger möjliga vägar genom skogen. På varje båge står avståndet. Nod 1 är Snöpigan.



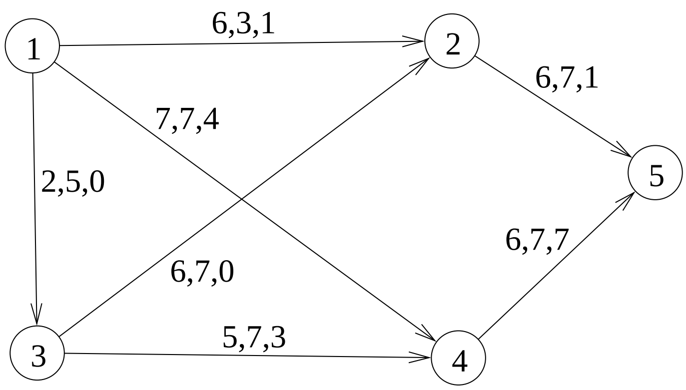
a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finna den kortaste rundturen? Finn en bra rundtur med valfri metod. Beskriv dock metoden. Finn även en undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet med en känd relaxation av problemet, och ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (3p)

b) Trots all försiktighet glöms lille Kalle kvar i skogen. Kalle är en försiktig parvel och kommer inte att avvika från stigarna, så om man bara genomsöker alla stigar, kommer man så småningom att hitta Kalle. Vilket känt optimeringsproblem är det att finna en kortaste rundtur som genomgår all stigarna? Finn en optimal rundtur. (3p)

c) Ett annat sätt att hitta lille Kalle är att placera ut dagisfröknar vid vägskälen (dvs. i noderna) i skogen, så att alla stigar kan ses av någon. Vi antar att man kan se hela bågen från varje ändnod. Vilket känt optimeringsproblem är det att övervaka alla stigar med minst antal dagisfröknar? Finn en bra lösning med en heuristik. Hur många fröknar går åt? (2p)

Uppgift 5

K-frakt har fem pallar gummi i nod 1 och tre i nod 3, och ska transportera 8 pallar till nod 5. Nedanstående nätverk visar de möjliga transportvägarna. På bågarna står först transportkostnad per pall, sedan övre gräns för hur många pallar som kan skickas den vägen och sist ett möjligt sätt att skicka pallarna.

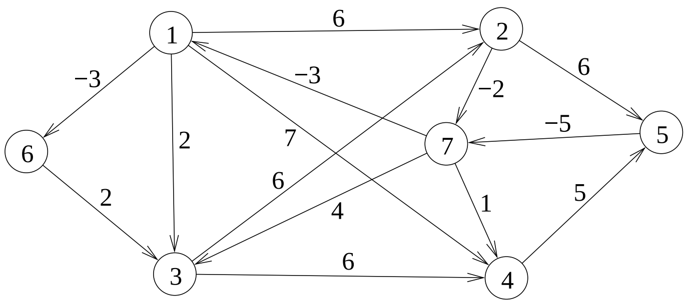


a) Starta med lösningen i uppgift a och finn ett minkostnadsflöde med simplexmetoden för nätverk. (3p)

b) Man kan alternativt använda båt från nod 3 till nod 5, till en kostnad av 9 per pall. Skulle detta sänka den optimala totalkostnaden? Ledning: Finn svaret med hjälp av nodpriser. (1p)

Uppgift 6

Snöröjare Sören ska köra sin lastbil från nod 1 till nod 5. Han har inte monterat bort snöplogen, så han kan, om så önskas, fälla ner plogen och ploga en sträcka. På vissa sträckor finns snö som behöver tas bort, så om han kör där, kommer han att ploga och därvid tjäna pengar. På andra sträckor kostar det bara att åka. Förväntad nettokostnad står på varje båge.



a) Finn den väg som minimerar kostnaden med en lämplig metod. Kommer han att utföra någon snöröjning? (2p)

b) Det finns en liten skogsväg från nod 6 till nod 4 som Sören skulle kunna ta. Vad får kostnaden för den vägen högst vara, om det ska löna sig för Sören att ta den vägen? (1p)

Uppgift 7

Betrakta grafen i uppgift 5, men strunta i kostnader och flöde. Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flödet noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 8

Fyra studenter ska ägna vinterlovet åt att måla roliga figurer på suddgummin. Det finns fyra olika motiv och varje motiv ska målas på hundra suddgummin, och varje student ska ta hand om ett motiv. Studenterna har olika skicklighet när det gäller målning, och man har uppskattat tidsåtgången för varje student att måla varje motiv, se följande matris, där rader motsvarar studenter och kolumner motiv. Man vill fördela motiven mellan studenterna så att den totala tiden för arbetet blir så kort som möjligt. Varje student ska göra ett motiv och varje motiv ska målas hundra gånger (av samma person).

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Student nummer 2 har klämt fingret i en dörr, så alla motiv kommer att ta 10 tidsenheter mer. (Dvs. lägg till 10 till den andra raden i kostnadsmatrisen.) Kommer den primala och duala lösningen att ändras, och i så fall hur? (Lös inte om problemet.) (1p)