Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	8 januari 2016
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

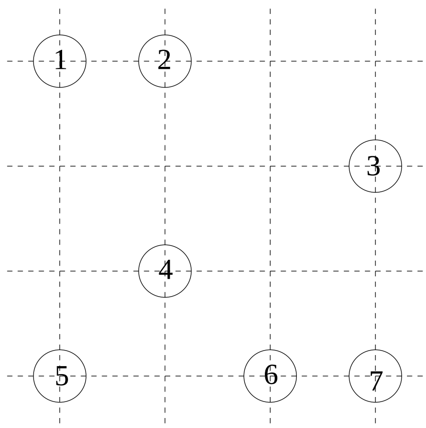
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

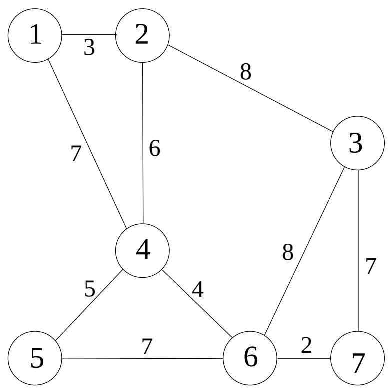
Uppgift 1

a) Tomten ska dela ut julklappar till familjer bosatta i noderna i nedanstående graf. Som bekant tar sig tomten fram med en flygande släde dragen av flygande renar. Därför kan han ta raka vägen mellan noderna, så grafen han kan färdas i är en fullständig graf. Bågarna är inte utritade i figuren. Istället finns ett streckat rutnät markerat som hjälp. En ruta i detta nät har längden 1, och vi räknar med Euklidiska avstånd (dvs. avståndet fågelvägen). (I denna uppgift kan man använda följande approximationer: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{5} \approx 2.2$, $\sqrt{10} \approx 3.2$, $\sqrt{13} \approx 3.6$.)



Uppgiften är att finna en kortaste rundtur som besöker varje nod en gång. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Börjar med att finna en tillåten lösning med en heuristik. (En känd heuristik ska namnges, medan en okänd heuristik måste beskrivas.) Använd därefter en bra relaxation av problemet, för att få en undre gräns till det optimala målfunktionsvärdet. Ange hur långt ifrån optimum den ovan funna lösningen som sämst är. (3p)

b) Grafen nedan föreställer den lilla byn Snällboda, och julklapparna ska delas ut till alla familjer som bor längs med vägarna, inte i noderna. Vilket optimeringsproblem blir det? Finn en optimal lösning. (3p)



Uppgift 2

Affärskedjan ElDeterminanten ska ta hem varor inför mellandagsrean. I en viss butik funderar man på hur många stora TV-apparater, diskmaskiner och bärbara datorer man ska ta hem. Man räknar med att sälja allt man tar hem, och vill helt enkelt maximera vinsten.

Nedanstående tabell anger vinsten för varje såld enhet av de olika varusorterna. Man har begränsat utrymme, och har beräknat varje varas utrymmeskrav. Det totala utrymmet får inte överstiga 120. Varje vara innebär att man ligger ute med ett visst kapital under tiden fram till försäljning, och man har inte råd med att ligga ute med mer än 100 totalt.

Vara	Vinst	Utrymmeskrav	Kapital
TV	8	6	10
Diskmaskin	6	5	5
Dator	3	2	4

Man har formulerat en linjär optimeringsmodell, där x_1 står för hur många TV-apparater man tar hem, x_2 för hur många diskmaskiner man tar hem, och x_3 för hur många datorer man tar hem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 8x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{då} & & 6x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & \leq & 120 & \quad (1) \\
 & & 10x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & \leq & 100 & \quad (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp ElDeterminanten att bestämma hur mycket man ska ta hem av de olika sorterna genom att lösa LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt total vinst. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Vad skulle man tjäna på att ha lite mer plats? Vad skulle man tjäna på att ha lite mer kapital? (1p)

c) Man vill ta in kaffeautomater i planeringen. En kaffeautomat ger vinst 4, kräver utrymme 5 och kapital 3. Skulle lösningen bli bättre genom att ta hem några sådana? (Lös ej om problemet.) (1p)

d) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Lös problemet grafiskt. Kontrollera med resultatet i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

Uppgift 3

ElDeterminanten funderar på hur man ska ställa upp varorna i affärslokalen. Man tittar närmare på TV-apparater och datorer, som delar ena sidan av lokalen.

Som variabler väljer man den yta som varje vara ska uppta, så x_1 står för den yta som upptas av TV-apparater och x_2 för ytan för datorer. Totala ytan är 2, och inte mer än en ytenhet får användas till TV.

Målfunktionen är i princip att sälja så mycket som möjligt, men det blir komplicerat att formulera den. Man hyr in konsultfirman PRut (PR utan trassel), som kommer fram med följande målfunktion. Man väljer att minimera av kombination av trängseleffekt (kunder måste få plats) och negativ reklameffekt (allt som kan få kunderna att inte köpa). Detta ger (enligt PRut) följande optimeringsproblem.

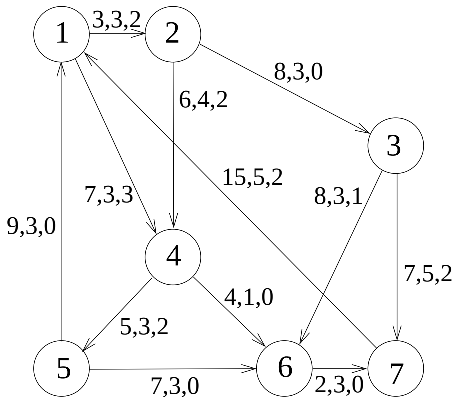
$$\begin{array}{rl} \min f(x) = & x_1^2 - 3x_1 + 2x_2^2 - 2x_2 - x_1x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av punkterna A: (1, 1), B: (2, 2), C: (0, 2), D: (0.5, 0.5) och E: (1, 0.75) ger den optimala lösningen. (3p)

b) Rita in eventuella tillåtna förbättringsriktningar i punkterna i uppgift a. (Utnyttja gärna resultat från uppgift a.) (2p)

Uppgift 4

Affärskedjan MediaInfarkt ska köra varor från sina lager till sina affärer. Nätverket nedan anger de möjliga transportvägarna.



Man har tre containrar med varor i nod 1 och tre i nod 3, och vill få tre till nod 4, två till nod 5 och en till nod 6. På bågarna står först transportkostnad per container, sedan övre gräns för hur många containrar som kan skickas den vägen och sist ett möjligt sätt att skicka varorna.

a) Är det optimalt att skicka enligt förslaget om man vill minimera transportkostnaderna? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Man upptäcker att bågen från nod 4 till nod 6 är felritad. Den ska gå i motsatt riktning, från nod 6 till nod 4, med samma data som nu. Kommer detta att ändra det optimala flödet? Starta med den angivna lösningen i uppgift a och finn ett minkostnadsflöde med simplexmetoden för nätverk. (2p)

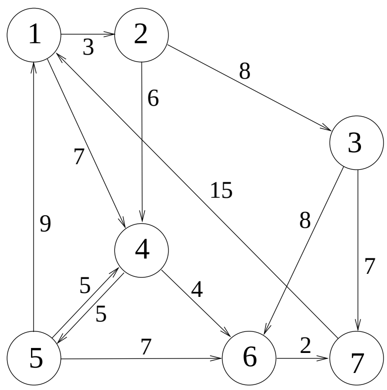
c) Det visar sig att man kan få en container flyttad från nod 6 till nod 7 utan kostnad. Skulle detta sänka den optimala totalkostnaden? Ledning: Finn svaret med hjälp av nodpriser. (1p)

Uppgift 5

Betrakta grafen i uppgift 4, men strunta i kostnader och flöde, och ändra kapaciteten på båge (3, 7) från 5 till 2. Finn maxflöde från nod 1 till nod 7. Starta med flödet noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 6

a) Tomtenissen Klasse ska ta sig från Gesundaberget (nod 1) till Rovaniemi (nod 7) för att hjälpa till med julklappsproduktionen. Han kan resa med tåg, buss, flyg och/eller hyrd bil. Nätverket nedan visar de olika transportmöjligheter som finns. Bågkoefficienterna motsvarar kostnad, och Klasse vill resa så billigt som möjligt. Finn bästa väg åt Klasse med lämplig metod. (2p)



b) Klasse skulle kunna hoppa på en lastbil (full av julklappar) som går från nod 4 till nod 3. Vad får kostnaden för det högst vara, om det ska löna sig att ta den vägen? (1p)

c) Betrakta problemet i uppgift a. Antag att båge (7, 1) skulle kosta -5 istället för 15. Utgå från de optimala nodmärkningarna i uppgift a och finn ny optimallösning med en lämplig metod. (1p)

Uppgift 7

Firma Rätt&Slätt ska köpa in nya hyllor. Det finns två sorter. Låt x_1 vara antalet hyllor av sort 1 och x_2 antalet hyllor av sort 2 man ska köpa. Man vill maximera antalet produkter som får plats i dem, men har vissa utrymmesbegränsningar. Detta ger följande optimeringsproblem.

$$\begin{array}{rl} \max f(x) = & 6x_1 + 5x_2 \\ \text{då} & 3x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & 0 \leq x_1 \leq 5 \\ & 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array}$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 8

Fyra tomtenissar ska utföra fyra olika arbetsuppgifter till taktfast militärmusik av Schubert i tomteverkstaden på Gesundaberget. Nissarna har olika taktkänsla, och man har uppskattat tidsåtgången för varje nisse att göra varje uppgift, se följande matris, där rader motsvarar nissar och kolumner uppgifter. Man vill fördela arbetet så att den summerade tiden för arbetet blir så liten som möjligt. Varje nisse ska göra en uppgift och varje uppgift ska göras en gång.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 7 & 15 \\ 7 & 15 & 6 & 15 \\ 7 & 17 & 6 & 16 \\ 9 & 14 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Motivera varför man i första fasen i ungerska metoden skulle kunna ta kolumnerna (β) först och raderna (α) sedan, istället för tvärtom, som man brukar. Lös problemet på detta sätt? Blir lösningsgången annorlunda? Blir slutresultatet annorlunda? (2p)

c) En av arbetsuppgifterna, nummer 3, visar sig vara svårare än man trott. (Man har helt enkelt inte tagit hänsyn till den fysiska verkligheten vid planeringen.) Uppgift 3 kommer att ta 20 tidsenheter mer. (Dvs. lägg till 20 till den tredje kolumnen i kostnadsmatrisen.) Kommer den primala och duala lösningen att ändras, och i så fall hur? (Lös inte om problemet.) (1p)