Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	26 augusti 2016
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Linolf och Linella ska ordna en fest åt sina kompisar. De ska hitta på flera spel och lekar som kan roa deltagarna.

Det första spelet de konstruerar är ett enkelt äppelroulette. Det finns tre rutor man kan satsa på. Om man satsar 1 pollett på alternativ 1 är den förväntade vinsten 2 äpplen, om man satsar 1 pollett på alternativ 2 är den förväntade vinsten 3 äpplen, och om man satsar 1 pollett på alternativ 3 är den förväntade vinsten ett äpple. Frågan är hur en spelare med 1000 polletter ska satsa för att maximera det förväntade antalet vunna äpplen. Man får inte satsa mer än 500 polletter på något alternativ. Alternativ 2 är mer osäkert än alternativ 3, så man vill inte satsa mer på alternativ 2 än på alternativ 3. Detta kan formuleras som följande LP-modell.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrr}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1000 & (1) \\
 & & & & x_2 & - & x_3 & \leq & 0 & (2) \\
 & & x_1 & & & & & \leq & 500 & (3) \\
 & & & & x_2 & & & \leq & 500 & (4) \\
 & & & & & & x_3 & \leq & 500 & (5) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och total förväntad vinst. Vilka bivillkor blir aktiva? Är optimallösningen unik? (3p)

b) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Ange optimal duallösning mha. optimaltablån i uppgift a. Kontrollera att den duala lösningen är tillåten, samt att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. Är optimallösningen degenererad? (3p)

c) Använd skuggpriser för att besvara följande frågor. Vad skulle man tjäna på att ha en pollett till att satsa? Vad skulle man tjäna på att tillåta satsning av en pollett mer (än 500) på alternativ 3? Förklara ev. avvikelser från vad sunda förnuftet säger. Ledning: Det kan ha med degeneration att göra. (2p)

Uppgift 2

Betrakta en förenklad variant av sudoku, där matrisen har storlek 4x4 och siffrorna 1, 2, 3 och 4 ska placeras ut så att det blir en siffra av varje sort i varje rad, en i varje kolumn och en i varje mindre 2x2 kvadrat.

Formulera en linjär heltalsmodell för problemet. Använd gärna följande beteckningar: $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, $R_2 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$, $R_3 = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$, $R_4 = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

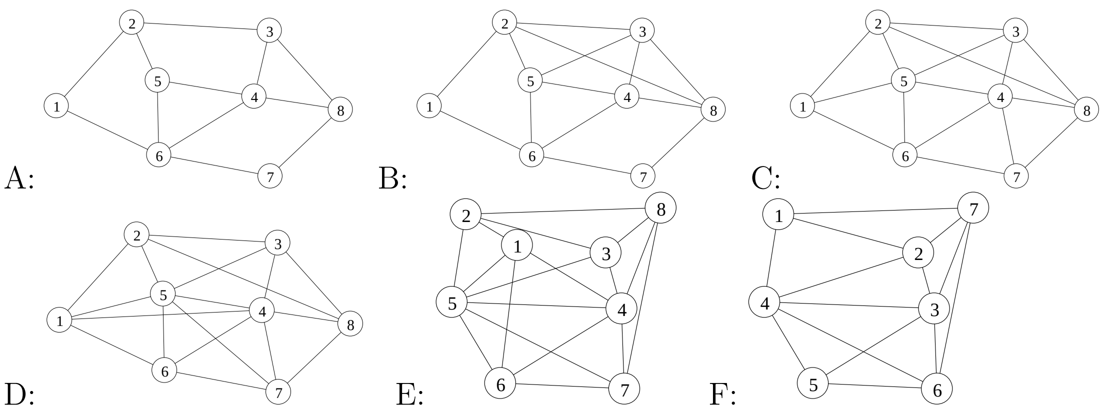
Följande är en tillåten lösning till problemet. Visa att den uppfyller alla bivillkor i modellen i uppgift a.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Beskriv hur problemet kan lösas med variabelfixering (Balas metod). (5p)

Uppgift 3

En uppgift är att försöka rita en viss figur utan att lyfta pennan och utan att rita något streck fler än en gång. Vi lägger här till att man ska sluta i samma punkt som man började i. För vilka av följande grafer kan bågarna ritas på det sättet? Motivera tydligt.

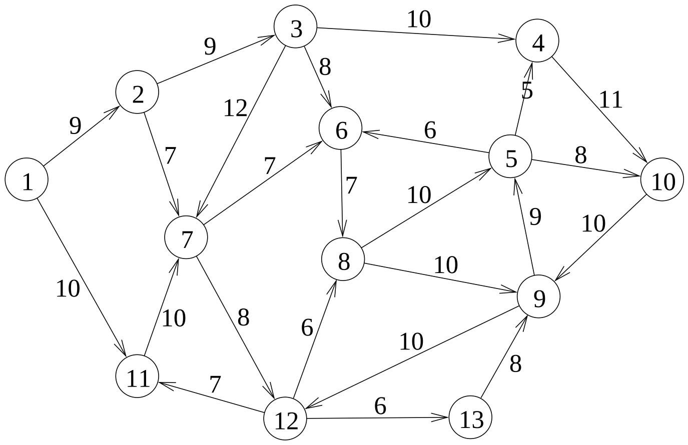


Om det inte går, kan man tillåta att vissa streck ritas dubbelt, men kräver då att minimalt antal streck ritas dubbelt. Ange för de grafer som inte kunde ritas på önskat sätt vilka bågar som då ska ritas två gånger. (3p)

Uppgift 4

Nästa lek är en enkel form av orientering. Följande graf anger hur man kan ta sig fram i trädgården som används till festen. Observera att bågarna är riktade.

Uppgiften är att starta i nod 1 och ta sig till första kontrollen i nod 5, därefter till andra kontrollen i nod 12 för att sedan spurta i mål i nod 10. Bågkoefficienterna anger tiden varje sträcka tar och man vill givetvis minimera den totala tiden.

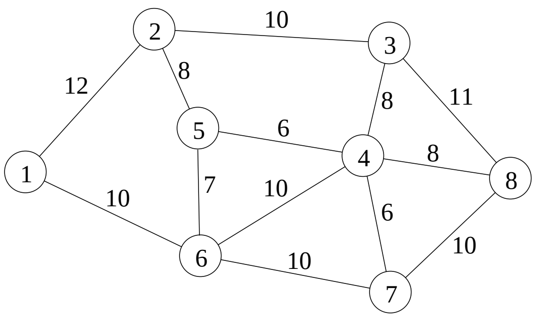


a) Förklara hur en lösning till detta problem kan finnas mha. flera billigaste vägsökningar. Lös problemet och ange bästa väg, samt tiden den tar. (3p)

b) Antag att man får ta kontrollerna i vilken ordning man vill, men fortfarande ska starta i nod 1 och sluta i nod 10. Vilken är då bäst att ta först? Använd *en* billigaste vägsökning som redan är gjord i uppgift a för att besvara frågan. (1p)

Uppgift 5

Man har också konstruerat en annan variant av orienteringen i uppgift 4, där alla bågar är oriktade och kontrollerna kan tas i vilken ordning som helst. Start och mål är båda i nod 1. Som förbearbetning har man eliminerat alla vägskäl (noder) som inte är kontroller, och skapat en graf med bågar som motsvarar kortaste vägen mellan relevanta par av kontroller. Den därvid erhållna grafen ges nedan, med sträcka angiven på varje båge. Uppgiften är alltså att finna kortaste rundtur som besöker varje nod.



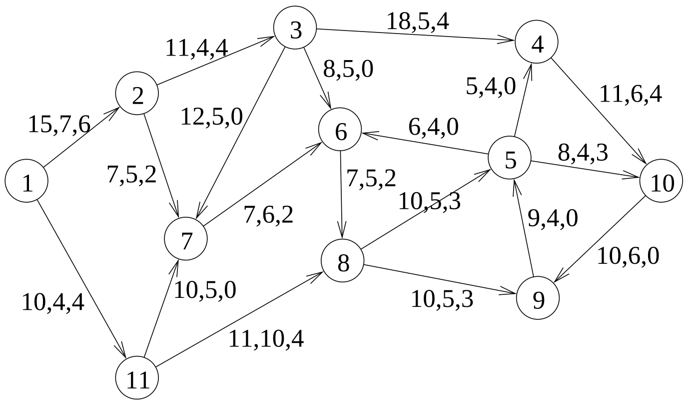
a) Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Finn även en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum den erhållna lösning kan vara. (3p)

b) Vid varje kontroll ska ett elektriskt stämpelur ligga, så man behöver dra elledningar längs bågarna till varje kontroll (nod). Målet är helt enkelt att koppla ihop alla noderna till lägsta kostnad, och bågkoefficienterna kan användas som kostnad. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. (2p)

Uppgift 6

Nästa tävling går till som följer. Tio tunga bildäck ligger i nod 1, och av dem ska 7 bäras till nod 10 och 3 till nod 9, via nätverket som följer. Den tävlande ska göra detta på kortast möjliga tid. Utan bildäck går det snabbt att springa tillbaka, så vi räknar bara med tiden då man bär. Man kan bara bära ett däck åt gången. Om man bär två gånger längs samma båge, blir ju kostnaden (tiden) dubbelt så stor, så vi kan se kostnaderna som linjära funktioner av flödet (dvs. antal gånger man bär längs bågen).

För att krångla till det är bågarna riktade, och det finns också begränsningar på hur många gånger man får ta en viss båge. (Vägen tillbaka utan däck räknas ej.) Vi antar att den tävlande håller konstant hastighet, och behöver därför inte hålla reda på i vilken ordning däcken bärs.



Man kan alltså se det som ett minkostnadsflödesproblem. När det blir Bertas tur, har hon observerat hur Abel gjorde. På bågarna i grafen står först bågens längd, sedan övre gränsen för hur många gånger man får använda den bågen och sist hur många gånger Abel använde bågen.

a) Berta tänkte först använda samma vägar som Abel, men insåg sedan att Abel inte skrev lika bra som Berta på optimeringstentan. Därför börjar Berta med att kontrollera huruvida Abels lösning är optimal (mha. simplexmetoden för nätverk). Om den inte är optimal, utgår Berta från Abels lösning och finner den optimala lösningen. Gör detta! Hur mycket bättre blir Bertas lösning? (3p)

b) Genom att kliva över en låg häck kan Berta minska tiden för båge (2,3) från 11 till 9. Berta misstänker att Abel gjorde det, och tänker därför göra sammalunda. Hur skulle det påverka slutsatserna i uppgift a? (Gör inte om allt från början.) (1p)

c) Hur många däck kan man maximalt förflytta från nod 1 till nod 10? Starta med flödet noll och gör alla steg i maxflödesmetoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 7

En annan tävling går ut på att en i laget blandar till en hälsodrink av baobab och spirulina (i vatten), och en annan lagmedlem måste dricka upp den. Givetvis vill man göra den så god och nyttig som möjligt. Om man låter x_1 stå för andelen baobab och x_2 för andelen spirulina, fås risken för att drycken blir odrickbar av funktionen $f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 - 20x_1 - 5x_2$. Man vill alltså minimera denna funktion, under bivillkoren att totala mängden inte får överstiga 1 ($x_1 + x_2 \leq 1$) samt givetvis $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av punkterna A: (1, 0), B: (0, 0), C: (0, 1) och D: (0.5, 0.5) ger den optimala lösningen. (3p)

b) Rita in eventuella tillåtna förbättringsriktningar i punkterna i uppgift a. (Utnyttja resultat från uppgift a.) (1p)

Uppgift 8

En viss lek ska göras i två-personersgrupper, där varje par består av en teknolog och en humanist. För varje möjligt par har man uppskattat kompabilitetssvårigheterna, vilka anges i nedanstående matris, där rader motsvarar teknologer och kolumnerna motsvarar humanister. Man vill göra gruppindelningen så att den totala inkompatibiliteten (representerat av koefficienterna i matrisen) minimeras.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Humanist 1 blir sjuk och ersätts av sin mer fördomsfulla kompis, vilket leder till att alla koefficienter i kolumn 1 måste ökas med 4. Kommer den primala och/eller duala lösningen att ändras, och i så fall hur? (Lös inte om problemet.) (1p)