Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	28 oktober 2016
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

a) Firma Albinssons Grönt har köpt in 600 gröna paprikor och 500 röda paprikor. Man har kommit på att man kan tjäna mer pengar på att sälja påsar med flera sorter i. Om man lägger tre gröna och tre röda i en påse, kan man sälja den till en förtjänst av 6 kr. Om man lägger fyra gröna och fyra röda i en påse, kan man sälja den till en förtjänst av 5 kr. Om man bara lägger två gröna i en påse, kan man sälja den till en förtjänst av 1 kr. För att bestämma hur man ska göra för att maximera förtjänsten sätter man upp följande LP-problem.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & z = & 6x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 600 & \quad (1) \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 500 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och total förtjänst. Är optimallösningen unik? (3p)

b) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Ange optimal duallösning mha. optimaltablån i uppgift a. Rita upp det duala tillåtna området och markera duallösningen. Kontrollera att den duala lösningen är tillåten, samt att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

c) Använd skuggpriser för att besvara följande fråga. Vilket skulle man tjäna mest på: Att köpa ytterligare några gröna paprikor eller ytterligare några röda? (1p)

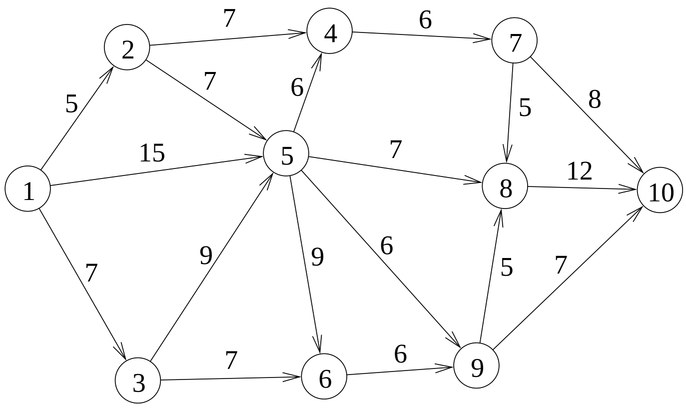
d) Hur stor behöver förtjänsten för en påse med 3 gröna och 2 röda paprikor vara för att den påsen ska vara lönsam? (1p)

e) Rita in det duala bivillkor som motsvarar den nya variabeln i uppgift d i figuren i uppgift b för ett värde på förtjänsten som gör den lönsam. (1p)

f) En icke-heltalig lösning är egentligen inte möjlig. Avrunda LP-lösningen i uppgift a till en tillåten heltalslösning. Beräkna skillnaden i målfunktionsvärde mellan den avrundade lösningen och LP-lösningen. Gör den första förgreningen, som om heltalsproblemet skulle lösas med Land-Doig-Dakins metod. Lös inte delproblemen, men notera kända övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet. (1p)

Uppgift 2

a) Examinator Karl Eulerberg ska vara jourhavande på en tenta. Han ska gå från sitt kontor i nod 1 i följande graf till tentamenslokalen i nod 10. Yttertemperaturen är -14^o, så han vill gå den kortaste vägen. Bågkoefficienterna anger avstånd.



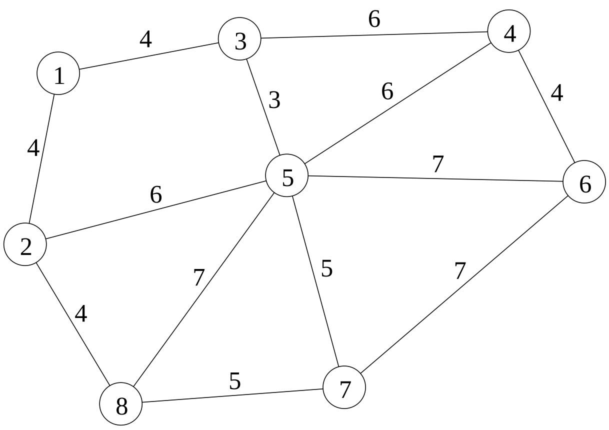
a) Lös problemet med lämplig metod och ange bästa väg samt total sträcka. Motivera valet av metod. (2p)

b) När det är dags för omtenta är det sommar och solen skiner. Han vill gärna gå en något längre sträcka. För det första anser han att bågarna (5,4), (7,8), (5,6), (6,9) och (8,9) är oriktade. (Det fixas lätt genom att även införa motriktade bågar med samma kostnad.) För det andra är parken vid båge (5,8) så trevlig att det är en njutning att gå där, så han sätter kostnaden till -3. Av liknande skäl sätter han kostnaden för båge (8,10) till -2. Lös problemet med lämplig metod. Motivera valet av metod. (3p)

Uppgift 3

I nedanstående graf är noderna lövhögar som man har sopat ihop av alla nedfallna löv, och Albin ska köra runt med sin väldigt stora skottkärra och samla ihop alla löv. Skottkärran står i nod 1, och han ska lägga löven i en kompost som också befinner sig i nod 1. Alla löv får plats i skottkärran samtidigt.

Det finns risk för höststorm, och då skulle alla löven blåsa iväg, så Albin vill hitta snabbaste vägen runt. Bågarna i grafen anger möjliga vägar mellan lövhögarna, och på varje båge står avståndet mellan ändnoderna, vilket är proportionellt mot tiden det tar att gå den vägen med skottkärran. Uppgiften är alltså att finna kortaste rundtur som besöker varje nod.



a) Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Finn även en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum den erhållna lösning kan vara. (3p)

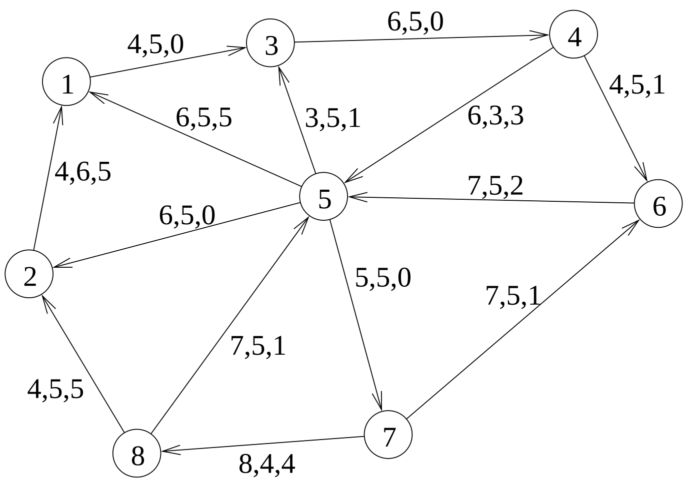
b) Albin kommer på att sträckorna i grafen mättes upp förra sommaren, och efter det har det varit en storm som fällt vissa träd, så siffrorna är osäkra. Eftersom det är tungt att skjuta skottkärran, vill Albin vara säker på att vägarna är framkomliga. Han bestämmer sig därför för att gå runt och kontrollera alla vägar. Han går snabbare utan skottkärran, men kan ändå använda bågkoefficienterna som mått på hur lång tid sträckorna tar.

Han startar och slutar i nod 1 och vill alltså gå en rundtur som passerar varje vägsträcka (minst en gång) som är så kort/snabb som möjligt. Han vet dock att sträcka (6,7) är OK, eftersom Bertil har berättat det, så den sträckan behöver inte undersökas. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. (3p)

c) Albin upptäcker till sin bevikelse att alla vägar är ofarbara för skottkärran (inklusive (6,7), så Bertil hade fel). Han måste helt enkelt röja upp dem igen. Vilka vägar ska han röja? Det är arbetsamt att röja, så han vill röja så kort total sträcka som möjligt, och kravet är bara att nå alla lövhögar. (Han får strunta i den ursprungliga tanken att gå en trevlig, kort rundtur.) Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. (2p)

Uppgift 4

Firma Gräv&Grus har grävmaskiner till uthyrning. Just nu står det 4 st i nod 4, 5 st i nod 7 och 2 st i nod 8. Man har fått en beställning på 10 st till nod 1 och en till nod 3. Transporterna sker med järnväg, och grafen anger möjliga transportvägar, där noderna är stationer där omlastning kan ske. Varje båge motsvarar ett tåg, och varje tåg har en övre gräns för hur många grävmaskiner det kan ta med.



Kostnaden för transporterna är en linjär funktion av transporterad mängd, och koefficienterna bygger på avstånden. Målet är att få alla grävmaskiner på plats till så låg kostnad som möjligt.

Bågarna i grafen är märkta med kostnadskoefficient, kapacitet (övre gräns) samt antal transporterade grävmaskiner i ett preliminärt förslag på lösning.

a) Kontrollera om den preliminära lösningen är optimal (mha. simplexmetoden för nätverk). Om den inte är optimal, utgå från den lösningen och finn den optimala lösningen. (Tips: Ta med båge (5,1) som basbåge.) (3p)

b) Det går en smalspårig järnväg från nod 7 till nod 1. Hur mycket får den kosta om den ska vara värd att användas? (Dvs. vilken kostnadskoefficient ska den ha?) (1p)

c) Hur många grävmaskiner kan man maximalt förflytta från nod 4 till nod 1? Starta med flödet noll och använd maxflödesmetoden. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 5

Annhild ska odla morötter och sparris i sitt trädgårdsland. Frågan är hur mycket av varje sort. Hon låter x_1 stå för arean som används till morötter och x_2 för arean som används till sparris. Den maximala area som får användas är 4 m^2. Ingen av sorterna får använda mer än 3 m^2, och arean för sparris får inte vara större än arean för morötter.

Hon tycker ärligt talat att morötter är godare än sparris och funderar på målfunktionen max x_1. Men en linjär målfunktion ger en alltför extrem lösning, tror hon, så hon väljer istället målfunktionen min $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 20x_1 - 6x_2$.

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av punkterna A: (1, 1), B: (2, 2), C: (3, 1) och D: (3, 3) ger den optimala lösningen. (3p)

b) Rita in eventuella tillåtna förbättringsriktningar i punkterna i uppgift a. (Utnyttja resultat från uppgift a.) (1p)

Uppgift 6

Fyra "genier" utgör ett lag i en tävling i TV. De ska göra fyra uppgifter (en matteuppgift, en logisk uppgift, ett 3D-pussel samt en sudoku). Laget får självt välja vilken person som gör vilken uppgift. Det lag som blir färdigt på kortast tid vinner, så man vill göra tilldelningen så att den totala tiden minimeras. Man har uppskattat tiden det skulle ta för varje deltagare att göra varje uppgift, se följande matris, där rader motsvarar deltagare och kolumnerna motsvarar uppgifter.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 25 & 24 \\ 11 & 9 & 30 & 25 \\ 15 & 10 & 25 & 26 \\ 12 & 11 & 35 & 26 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

Uppgift 7

Albert har rensat sitt garage och ska köra stora saker till återvinningsstationen med sin lilla elbil, som dock inte klarar av hur stor vikt som helst. Albert vågar inte lasta mer än 70 kg, så han får köra flera gånger. Han vill givetvis köra så få gånger som möjligt. Följande saker ska återvinnas:

Sak		Vikt (kg)
1	En gammal cykel	30
2	En ännu äldre cykel	35
3	En tjock-TV	25
4	En trasig sågmaskin	55
5	En gammal grill	30
6	En låda med skräp	10
7	En större låda med skräp	20
8	En gammal gräsklippare	30

Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Beskriv metoden. Finn en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum lösningen som sämst är. (I detta sammanhang betyder "känd" att den nämnts på föreläsning och finns i kursboken.) (3p)