Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	17 oktober 2017
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

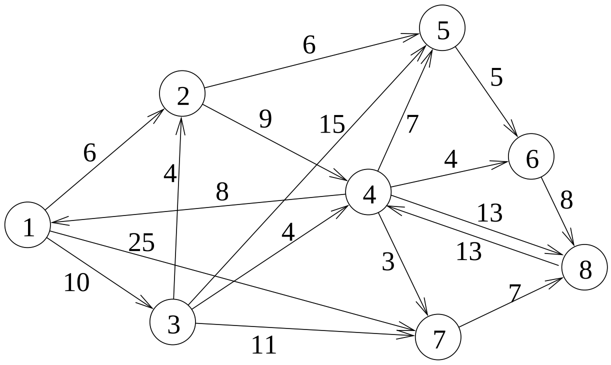
Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tips: Uppgifterna bygger textmässigt på varandra, så läs gärna igenom alla.

Uppgift 1

Grodo ska transportera sin utslitna badring från sitt hem i Fölke och slänga den i containern "Brännbart" på återvinningscentralen vid Domedagsberget. Han förföljs av Gullung, en liten udda individ som pratar med sig själv, och som själv vill ha ringen till varje pris. (Det är hans lillasyster.)

Nedanstående graf visar möjliga vägar för Grodo. Fölke ligger i nod 1 och återvinningscentralen i nod 8. På bågarna anges avstånd, och Grodo vill ta kortaste vägen, för att minimera risken att något händer med ringen. Han får inte lugn förrän den ligger i "Brännbart".



a) Hjälp Grodo att finna den snabbaste vägen. Grodo rör sig med konstant hastighet. Använd (tydligt) lämplig metod. (2p)

b) För att förvirra Gullung, gömmer Grodo lite godis längs bågarna (2,4) och (4,6), och berättar det för henne. Gullung har listat ut vart Grodo är på väg, men vill gärna hämta godiset på vägen till återvinningscentralen. Detta kan modelleras genom att ändra bågkostnaderna till $c_{24} = -3$ och $c_{46} = -2$. Finn billigaste väg för Gullung från nod 1 till nod 8. Använd (tydligt) lämplig metod. (2p)

c) Grodo skulle kunna krypa genom en liten tunnel (som kallas Moria) från nod 6 till nod 8. Hastigheten är då hälften så stor som på de normala vägarna. Hur lång får tunneln från nod 6 till nod 8 vara för att Grodo ska tjäna tid på att ta den? Vilken väg blir då bäst? Använd resultaten från uppgift a. (1p)

Uppgift 2

Den elake Sturon vill också ha ringen. Sturon vet inte vilken väg Grodo kommer att ta, och bestämmer sig för att låta sina medhjälpare ligga i bakhåll vid några bågar. Sturon har lite ont om medhjälpare, och vill därför använda så få som möjligt till denna uppgift. Det räcker med en medhjälpare vid varje bakhåll.

Vid vilka bågar ska Sturon anorda bakhåll? Finn svaret genom att sätta kapacitet ett på alla bågar och finna maxflöde från nod 1 till nod 8 i grafen i uppgift 1. Som bekant ger detta ett minsnitt, och bakhållen bör ju placeras på bågarna i minsnittet, eller hur? Motivera detta, och lös problemet. (Använd lämplig metod, och gör alla steg i metoden tydligt.) (4p)

Uppgift 3

Betrakta grafen i uppgift 1, men låt bågarna vara oriktade. (Ta bort den ena av bågarna mellan nod 4 och 8.) Gullung har kort minne, och glömmer var Grodo sa att han gömde godiset. Hon bestämmer sig för att godis är viktigare än ringen, och vill därför planera en rundtur där hon söker igenom alla bågarna. Rundturen ska börja och sluta i nod 1 och vara så kort som möjligt.

a) Hjälp Gullung att finna den bästa turen med lämplig metod. (Lite hjälp: Summan av alla bågkostnader är 145.) Ge totalkostnad, rundtur och ange specifikt vilka bågar som används mer än en gång. (3p)

b) Antag istället att Grodo gömt godis vid några av noderna, och att Gullung återigen vill hitta kortaste rundtur, men nu som besöker varje nod (minst) en gång. Finn på lämpliga sätt bra undre och övre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 4

Ett sätt att snabbt förflytta ringen är att anordna en stafett. En personen tar ringen och springer en sträcka i full fart, ger sedan ringen till en annan person, som fortsätter loppet, osv. Fem personer, Grodo, hans kompisar Sammy, Jerry och Pippeline, samt dvärgen Gamli, ska hjälpas åt. De fem sträckorna är förbestämda och av olika typ, så de gör en bedömning av hur lång tid varje sträcka skulle ta för varje person. Tiderna ges i följande matris, där rader står för personer, och kolumner för sträckor. Den totala tiden ska minimeras.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 12 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

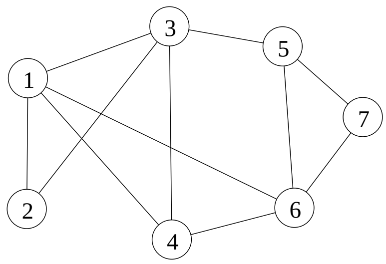
a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Antag att Grodo (rad 1) väldigt gärna vill ta sista sträckan (kolumn 5) och själv slänga ringen i containern. Hur mycket måste han sänka sin tid för den sträckan för att få den? Lös inte om problemet, utan använd duallösning eller reducerad kostnad från uppgift a. (1p)

Uppgift 5

Grodo kommer på att det är bäst att han själv bär ringen hela vägen, men han vill gärna ha sällskap med några reskamrater. Förutom de som nämns i uppgift 4, följer även den utmärkte bågskytten Lego-Lars och den modige Ara-Göran med.

Vid ett tillfälle ska de gå över en spång över en bäck, och ska då gå två och två. Det finns redan nu relationsproblem inom gruppen, så alla vill inte gå med alla. Följande graf anger möjliga parbildningar.



Helst vill person 1 gå med person 6 och person 3 med person 5. Vilket optimeringsproblem är det att bilda så många par som möjligt? Starta med de två favoritparen och finn en optimal lösning med lämplig metod. (2p)

Uppgift 6

Efter ett tag måste gruppen splittras, eftersom maten inte räcker. Några av de sju ska fortsätta i gruppen, och de andra får gå hem. Man gör en bedömning av hur stor nytta varje person kan tänkas ge, och hur mycket av den gemensamma matsäcken personen skulle äta upp. Nyttan ska maximeras, medan matsäcken är begränsad. Vi får följande optimeringsproblem. Låt $x_j = 1$ om person j ska följa med, 0 om inte.

$$\begin{array}{rrl} \max & z = & 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 8x_7 \\ \text{då} & & 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 5x_7 \leq 13 \\ & & x_j \in \{0, 1\} \text{ för alla } j \end{array}$$

Man bestämmer i förväg att Grodo och Sammy måste följa med, men att Jerry och Pippeline får gå hem, dvs. att $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Kvar återstår Gamli, Lego-Lars och Ara-Göran att välja mellan.

a) Lös problemet i x_5, x_6 och x_7 med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Glöm inte att ta hänsyn till fixeringarnas effekt i målfunktion och bivillkor. Ledning: LP-relaxationen är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med en effektiv metod (se boken). Tips: Gå ner i $\geq$-grenen först. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

b) Konstruera ett linjärt bivillkor från en minimal övertäckning som skär bort första LP-optimum i uppgift a. (1p)

Uppgift 7

Grodos pappa, Bil-Bo, ska gå i pension. Han ämnar försvinna under sin avskedsfest, och ska packa en kappsäck med det mest nödvändiga. Med viss vånda inser han att badringen inte kan tas med. Han har alvkex (otroligt mättande), hobbitkakor och morötter.

Begränsningar ges av kappsäckens storlek, vilken vikt Bil-Bo orkar bära och hur mycket han har av de olika sakerna. Han kommer fram till följande optimeringsmodell, där målfunktionen är att maximera energin i det som tas med, och variablerna står för hur kg av varje sort han ska ta med.

$$\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 8x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 21 & (1) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 22 & (2) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 6 & (3) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 4 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

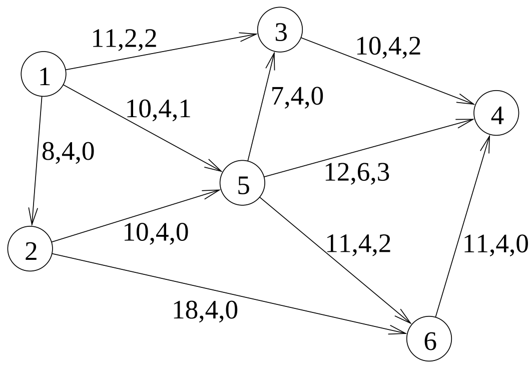
a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Ge skuggpriset för varje bivillkor och ange vad Bil-Bo skulle tjäna på att en lite större kappsäck och om han kunde bära lite mer. (2p)

c) Bil-Bo funderar på att ta med russin. Den variabeln skulle få koefficient 2 i de två första bivillkoren och noll i de andra. Energikoefficienten skulle bli 3. Skulle lösningen förbättras av russin? (1p)

Uppgift 8

Den onde Sturon har sju badringsvålnader som tjänar honom. Just nu är tre av dem i nod 1 i nedanstående graf och fyra i nod 5. Sturon vill så snabbt som möjligt att två av dem kommer till nod 6 och fem till nod 4. De måste färdas i mörker och får inte bli upptäckta. Sturon gör en uppskattning av hur stor risken är att en vålnad upptäcks på varje båge i grafen, och ser det som en linjär kostnad (två vålnader ger dubbelt så stor risk för upptäckt som en). Bågarna i grafen nedan är märkta med kostnadskoefficient, övre gräns för hur många vålnader som får använda bågen samt ett sätt att förflytta dem (framräknat av häxmästaren Ragnar).



a) Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om den angivna lösningen har minimal kostnad. Tips: Använd bl.a. båge (1,2) som basbåge. (2p)

b) Sturon får reda på att Lego-Lars just nu befinner sig vid båge (1,3), och vill därför undvika den bågen, om möjligt. Därför ökar han kostnaden på båge (1,3) till 20. Finn ny optimallösning. Starta med flödet i uppgift a. (2p)

c) Betrakta problemet i uppgift b innan förändringen. Hur mycket behöver man minst öka kostnaden på båge (1,3) för att uppnå önskad effekt? (1p)

Uppgift 9

Den vackra alven Larven vill hjälpa Grodo och ska därför röra ihop en salva som hjälper mot allt som badringsvålnader kan hitta på. Hon tänker blanda lavskägg och murkelsaft, och låter x_1 och x_2 ange mängden av dessa ingredienser. Det bästa resultatet fås av att minimera funktionen $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 6x_1 - 8x_2$, under bivillkoren att summan av ingredienserna inte är större än 2 och mängden lavskägg inte större än 1 (samt att ingen mängd är mindre än 0).

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om följande punkter är optimala: (1, 1), (0, 2), (2, 2) och (0.5, 1.5). (3p)

b) Markera konerna av tillåtna förbättringsriktningar i punkterna i uppgift a i en graf. Utnyttja gärna resultaten i uppgift a. (1p)