Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	22 oktober 2018
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Det var en gång för länge, länge sedan ett litet, litet land långt, långt borta, som var helt olikt Sverige på alla sätt, förutom att man hade demokrati, vilket betyder att de styrande tillsätts med allmänna val. Det lilla landet sade sig ha, liksom Sverige, ett proportionellt valsystem, vilket betyder att varje parti får ett antal mandat (platser i riksdagen) som är proportionellt mot antalet röster partiet fått i valet. Tyvärr är ju antalet platser i riksdagen heltal, och betydligt mindre än antalet röster, så perfekt proportionalitet är ej möjligt.

Vid det senaste valet röstade 100 personer i det lilla landet, och antalet platser (mandat) i riksdagen var 10. Rösterna fördelades på följande sätt.

Parti	Antal röster
Administratörerna (A)	33
Byråkraterna (B)	29
Common People (C)	24
De Vilsna (V)	7
Xenofoberna (X)	2
Ytterpartiet (Y)	2
Zeptopartiet (Z)	3

Rösterna brukade fördelas enligt "den jämkade uddtalsregeln", en sekvensiell heuristik som faktiskt specificeras i lagtext. (Det skulle ge A: 3, B: 3, C: 3 och V: 1.) Sven Nobel, en nytänkande demokrat (med viss universitetsutbildning) föreslog istället att man skulle optimera mandatfördelningen med följande optimeringsmodell. Här anger x_j antal mandat parti j ska få, medan r_j anger hur många röster parti j fick. Antalet partier är n, antal röster p (dvs. $p = \sum_j r_j$) och totalt antal mandat m. Målfunktionen säger att man ska komma så nära perfekt proportionalitet som möjligt, och använder $d = m/p$, vilket anger antal mandat per röst. (Kvadratroten av hälften av målfunktionsvärdet ger det så kallade Gallagher-indexet för hur proportionell fördelningen är.)

$$
\begin{aligned}
\min \quad f(x) = \; & \sum_{j=1}^{n} (x_j - dr_j)^2 \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = m \\
& x_j \geq 0, \ \text{heltal, för alla } j
\end{aligned}
$$

För det lilla landet är $n = 7$, $p = 100$, $m = 10$, $d = 0.1$ och r fås ut tabellen ovan.

a) Betrakta relaxationen som fås då heltalskravet relaxeras i problemet ovan. Sven är övertygad om att optimallösningen till problemet blir $x_j = dr_j$. Visa med hjälp av KKT-villkoren att denna lösning är optimal. Glöm inte att kontrollera konvexitet. (2p)

b) För att krångla till det ytterligare har det lilla landet infört en spärr som säger att partier som får mindre än 5% röster inte får några mandat. Det betyder att mandaten kommer att delas ut utan att röster på småpartier räknas (och en röst på ett större parti ger större effekt än utan spärren). Beräkna med hjälp av KKT-villkoren den nya lösningen till relaxationen. Ledning: Stryk de partier som har för få röster, vilket ger att alla kvarvarande partier får x_j strikt större än noll. (3p)

Uppgift 2

I ett aningen större grannland har man också haft val. Nu återstår problemet att bilda regering. Partiledarna Tant Grön, Tant Brun och Tant Gredelin samt Farbror Blå ska samlas för att diskutera möjliga regeringsbildningar. De fyras partier har fått 21, 18, 6 och 16 mandat i riksdagen (i ovan nämnd ordning). Det är alltså 61 mandat totalt, så för att få majoritet, behövs 31 mandat. Alla är lite osams, och Tant Grön vägrar sitta i en regering som Tant Brun ingår i.

Man kan tänka sig att målet är att få in så få partier i regeringen, eftersom man förutser ytterligare bråk och osämja. Man formulerar följande optimeringsmodell, där $x_j = 1$ om parti j ska ingå i regeringen.

$$
\begin{array}{lll}
\min & f(x) = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{då} & & 21x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 16x_4 \geq 31 \\
 & & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & & x_j \in \{0,1\}
\end{array}
$$

a) Antag att problemet ska lösas med Land-Doig-Dakins metod. Strunta i bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 1$ och skriv om problemet som ett normalt kappsäcksproblem, så LP-relaxationen kan lösas med en känd metod (som bygger på LP-dualitet). Ledning: Ersätt x_j med $1 - x_j$, vilket betyder att $x_j = 1$ om parti j inte ska ingå i regeringen, och bivillkoret säger att mindre än hälften ska vara utanför regeringen. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. (3p)

b) Ta fram en minimal övertäckning till kappsäcksbivillkoret i uppgift a, och ange det bivillkor det leder till, samt ge en tolkning av vad det betyder när det gäller regeringsbildning. (1p)

c) Betrakta problemet utan omformuleringen i uppgift a. Vid närmare eftertanke kan Farbror Blå inte tänka sig sitta i en regering med Tant Grön, om inte Tant Gredelin också sitter i regeringen. Tant Brun vill inte sitta i samma regering som Farbro Blå, och Tant Gredelin kan bara sitta med i regeringen om Tant Brun är med. Formulera detta som linjära bivillkor. (1p)

d) Lägg till bivillkoren i uppgift c till problemet och lös problemet med Balas metod. Använd inte målfunktionsbivillkoret förrän en tillåten lösning fås. (Alternativt kan problemet lösas utan de extra bivillkoren, vilket ger ett avdrag på ett poäng). (3p)

Uppgift 3

Inför valet ska partiet Populisterna (P) bestämma vad man ska använda sin personal till i valkampanjen. Man kan satsa på att gå runt och knacka dörr, ringa telefonsamtal, skicka SMS samt bemanna valstugor på torget. P sätter upp följande optimeringsmodell, där x_j står för hur mycket personal man använder till aktivitet j (i ovanstående ordning). Det första bivillkoret säger att antal personer är begränsat, och de två följande modellerar skiftande skicklighet (alla är inte bra på allt). Målfunktionen bygger på hur verksamma man tror att de olika aktiviteterna är (dvs. hur många röster de kan ge).

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & 5x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 60 & (1) \\
 & & 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & \leq & 50 & (2) \\
 & & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 40 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

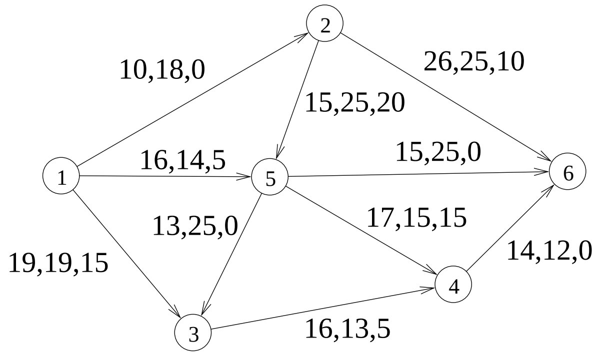
a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Antag att man med viss ansträngning kan öka något av högerleden med en enhet. Vilket högerled skulle man tjäna mest på att öka? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Antag att koefficienten 4 för x_2 i bivillkor 3 är osäker. För vilka värden på den koefficienten skulle x_2 vara större än noll i optimallösningen? (1p)

Uppgift 4

Röstsedlar ska levereras ut till vallokalerna innan valet. I följande graf har man 20 lådor röstsedlar i nod 1 och 30 i nod 2, och ska transportera 10 till nod 3, 20 till nod 4, 10 till nod 5 och 10 till nod 6. Transportörerna tar betalt per låda och bågarna i grafen visar vilka vägar som kan användas. På bågarna står kostnaden per låda samt hur mycket man maximalt kan köra den vägen.

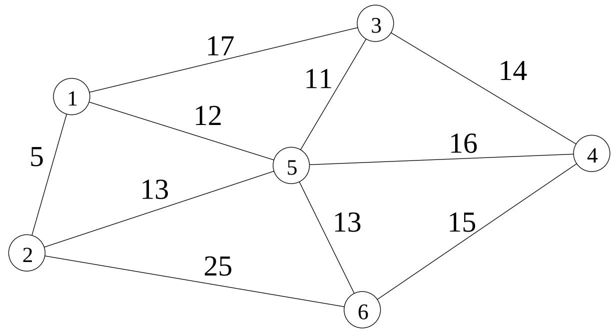


a) Det hela blir ett minkostnadsflödesproblem, och man har löst problemet. På bågarna står till sist flödet i optimallösningen. Visa att lösningen är optimal. (2p)

b) Utgå från lösningen i uppgift a. En något ljusskygg transportör åtar sig att transportera en obegränsad mängd lådor från nod 6 till nod 4 (dvs. mot enkelriktningen) till den låga kostnaden av 8 per låda. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 5

a) Valaffischer ska sättas upp innan valet, och man tänker sig att transportera affischer genom att köra runt med Bertils skåpbil i nedanstående graf där bågarna är märkta med avstånd. Bertils bil står i ett garage vid nod 3, och ska efter turen ställas tillbaka dit. Affischerna ska levereras till varje korsning (nod) i nätverket. Man vill helt enkelt hitta en rundtur som passerar varje nod en gång, och som är så kort som möjligt.

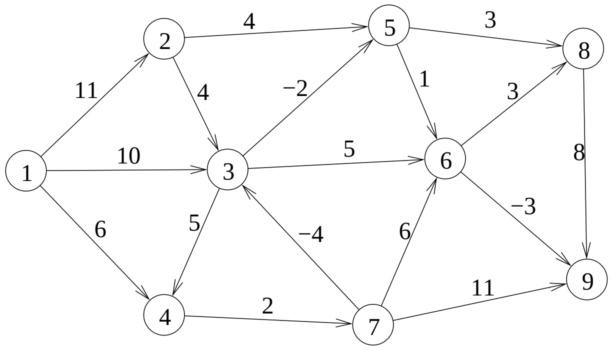


Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen, men ingen tillåten rundtur. (4p)

b) Man ändrar planen. Istället för att leverera affischerna till noderna, ska de sättas upp längs gatorna. Därför ska man köra Bertils skåpbil i en rundtur som passerar varje gata minst en gång, utom på gata (2,6), för där kör väldigt få, så affischerna skulle inte ha någon verkan. Det kommer att ta lång tid, så man vill givetvis hitta kortaste rundturen. Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka bågar ska köras mer än en gång? (3p)

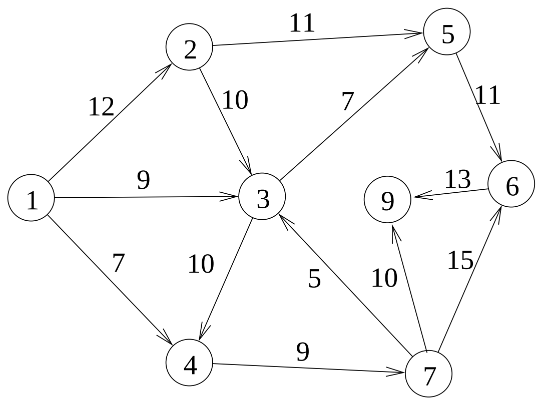
Uppgift 6

Arbetarpartiet Administratörerna (A) ska genomföra sitt sedvanliga demonstrationståg. Man ska starta i nod 1 och sluta i nod 8 i nedanstående graf. Det kommer dock att bli dåligt väder, så man vill inte gå för långt. Dessutom finns risk för att oliktänkande ska komma och börja bråka, så man vill definitivt gå kortaste vägen. Å andra sidan finns det gator man vill gå på, eftersom man tror att de boende där är relativt positivt inställda, och skulle kunna tänkas rösta på A. Därför sätter man negativa kostnader (dvs. vinst) på dessa bågar. Finn billigaste väg från nod 1 till nod 8 med de bågkostnader som anges i nätverket nedan. (2p)



Uppgift 7

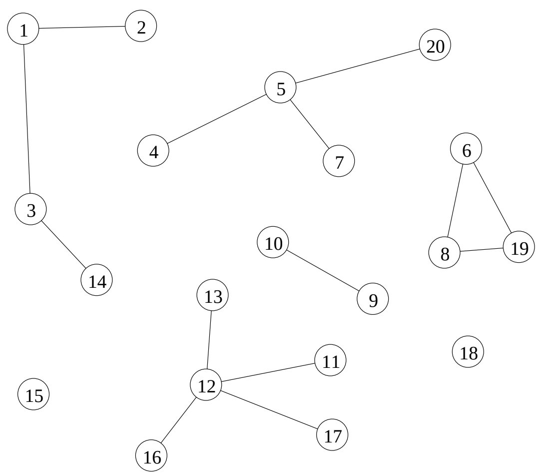
När det är dags för val, visar det sig att de styrande i kommunen har påbörjat ett antal vägarbeten runt valstation Stortorget 7 (där många ur oppositionen bor), så det är ganska svårt att ta sig fram. Finn maxflöde från nod 1 till nod 9 (valstationen) i följande graf med kapaciteter på bågarna.



Man vill även veta vilka gator det är som begränsar flödet, eftersom något av vägarbetena skulle kunna göras färdigt innan valet, om man bara koncentrerar resurserna, så att bågens kapacitet kunde ökas. Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 8

Efter valet ska olika arbetsgrupper till olika utskott sättas ihop, och platserna ska fördelas mellan de mest partitrogna medlemmarna. Arbetsgrupperna ska innehålla personer från de olika partierna, och då sätts samarbetsförmågan på prov. Man konstruerar en oriktad graf som visar relationerna mellan de aktuella personerna. Noderna motsvarar personer, och en båge betyder att de två personerna inte kommer att kunna samarbeta, eller inte bör vara i samma grupp av andra orsaker. Man ska välja ut ett antal arbetsgrupper, och varje arbetsgrupp ska bestå av ett antal personer (noder) som kan samarbeta. Antalet personer i varje arbetsgrupp är begränsat, och ingen person får sitta i fler än en arbetsgrupp. I värsta fall kan ett parti bestämma sig för att låta en stol vara tom, om ingen passande kandidat finns.



a) Hur kan man beräkna det maximala personer i en arbetsgrupp med hjälp av ett känt grafbegrepp? Gör det för grafen ovan. (1p)

b) Hur kan man beräkna det minsta antalet arbetsgrupper om alla personer ska vara med med hjälp av ett känt grafbegrepp? Gör det för grafen. (1p)

c) Välj personer till fyra arbetsgrupper med fyra personer i varje, och motivera valet, eller förklara varför det inte går. (1p)

Uppgift 9

Fem partitoppar ska delta vid fem olika arrangemang, som går av stapeln samtidigt. Frågan är vem som ska ta vilket uppdrag. Olika personer är olika bra på olika uppgifter, beroende på de personliga egenskaperna vältalighet, principfasthet, principlöshet, utseende och foklighet. För att finna bästa tilldelningen kan man sätta upp en matris med kostnader (dvs. hur många röster man kan tänkas förlora på deltagandet) för att låta person i göra uppgift j, och sedan finna tilldelningen som minimerar totalkostnaden. (Rader motsvarar personer och kolumner uppdrag.)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)