Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP89/TEN1
OPTIMERING FÖR IT

Datum:	3 januari 2024
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Förra året fick Jeppes pappa spader, och slängde julgranen i soporna med alla julgransprydnaderna på. Jeppes mamma sa att det berodde på glöggen, men Jeppe trodde att det berodde på ett övermått av julfrid. Men oavsett orsaken behöver man nu köpa nya julgransprydnader. Det visar sig att det i snabbköpet finns förpackningar med lämpliga blandningar av prydnader, så frågan är bara vilka och hur många man ska köpa. Jeppe kommer fram till att det finns förpackningar med följande innehåll. (Han bryr sig bara om vissa väsentliga saker.) I tabellen står också hur mycket Jeppe anser att det minst behövs av de olika prydnaderna.

	Förpackning			
Prydnad	1	2	3	Behov
Röda kulor	5	0	3	20
Imiterade istappar	0	2	3	7
Garntomtar	0	10	3	8
Änglar	0	5	3	9
Pris	14	20	18	

Han vill köpa förpackningar som innehåller de efterfrågade mängderna eller mer så billigt som möjligt. Han formulerar följande optimeringsproblem, där x_j anger hur många han ska köpa av de olika förpackningarna.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrr}
\min & z = & 14x_1 & + & 20x_2 & + & 18x_3 & & & \\
\text{då} & & 5x_1 & & & + & 3x_3 & \geq & 20 & (1) \\
& & & & 2x_2 & + & 3x_3 & \geq & 7 & (2) \\
& & & & 10x_2 & + & 3x_3 & \geq & 8 & (3) \\
& & & & 5x_2 & + & 3x_3 & \geq & 9 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Men sedan blir han frustrerad. Han vet inte hur man kan lösa sådana problem. Han brukar alltid börja i origo när han använder simplexmetoden, och här är ju origo inte tillåtet. Så kommer han på en ljus ide, nämligen att formulera LP-dualen till problemet, och lösa den. Då borde man ju kunna starta i origo.

a) Formulera LP-dualen till ovanstående problem. (1p)

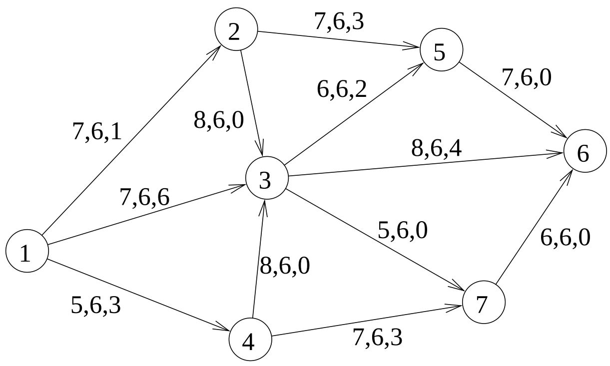
b) Lös problemet i uppgift a (dvs. LP-dualen) med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? Ange svaret till Jeppes ursprungsproblem i ord. (Den som inte har klarat uppgift a, kan lösa primalen genom att starta med baslösningen x_1, x_2 samt slackvariablerna till de två sista bivillkoren.) (3p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift b. Jeppe är väldigt priskänslig, och oroar sig för en prisökning på någon av förpackningarna. På vilken förpackning skulle en enhets prisökning ge största kostnadsökning? Motivera. (Ledning: Titta på dualen.) (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift b. Jeppe hittar en förpackning som innehåller 2 röda kulor, 3 garntomtar och 2 änglar, som kostar 12. Skulle den förändra optimallösningen? Motivera med dualen eller primalen. (1p)

Uppgift 2

Firma FinPapper levererar vackert papper att slå in presenter med. I december upplever man en oförklarlig ökning av efterfrågan. Därför passar man på att fylla lagren innan dess. I nedanstående nätverk motsvarar noderna 1 och 2 produktionsplatser och noderna 5, 6 och 7 kunder. Kunden i nod 5 har behov av 5 containrar presentpapper, kunden i nod 6 har behov av 4 och kunden i nod 7 har behov av 3. I nod 1 kan man producera upp till 10 containrar och i nod 2 upp till 7. Bågarna är märkta med kostnad per container och kapacitet, samt ett föreslaget flöde (baserat på förra årets plan, där nod 2 bara kunde producera 2 enheter.)



a) Total produktionskapacitet är större än total efterfrågan. Modifiera nätverket genom att addera en nod och några bågar och ändra källstyrka så att överskottet hanteras på optimalt (inte förutbestämt) sätt. (1p)

b) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket fortfarande är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med angivet flöde. Ange optimal totalkostnad. (3p)

c) Betrakta problemet ovan, utan modifieringen i uppgift a. Finn maximalt flöde som kan skickas från nod 1 till nod 6 med standardmetod. Vilka bågar begränsar maxflödet? (Starta med flöde noll i alla bågar.) Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 3

Laisa ska göra en egen glögg. Hon tycker inte om de sorter man kan köpa, utan vill göra en egen blandning. Speciellt tycker hon inte om att det antingen är rött vin eller vitt vin. Hon vill ha en blandning, och hon vill ha den optimala blandningen. Låt x_1 står för andelen rött vin och x_2 andelen vitt. Genom idogt studium av litteraturen kommer hon fram till att smaken blir bäst av att minimera den olinjära funktionen $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_1 - 20x_2$, Bivillkoren blir helt enkelt $0 \leq x_1 \leq 1$ och $0 \leq x_2 \leq 1$ samt $x_1 + x_2 \leq 1$.

a) Extrempunkterna till det tillåtna området är (0, 0), (0, 1) och (1, 0). Kontrollera om de är optimala med hjälp av KKT-villkoren. Kontrollera även om någon punkt där inga bivillkor är aktiva är en KKT-punkt. (Tips: Man kan ta bort redundanta bivillkor.) (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a.) (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 10 och 20. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (3p)

d) Använd Lagrangerelaxationen i uppgift c. Lös ut optimalt x som funktion av ett okänt u. Antag att det relaxerade bivillkoret ska vara aktivt, och beräkna det u som ger detta. Utgå från den optimala x-lösningen och beräkna alla u som ger denna. (2p)

Uppgift 4

Laisa ska bestämma vilka julklappar hon ska ge sin mormor. Hon har fem saker hon kan ge mormor, och har uppskattat det värde hon tror att mormor skulle uppfatta av gåvan, samt den kostnad Laisa skulle få av att framställa och ge bort gåvan:

Sak	Värde för mormor	Kostnad för Laisa
1. En akvarellmålning	5	7
2. En påse hemkokt godis	4	5
3. En flaska hemgjord likör	8	4
4. En påse hembakade lussebullar	5	6
5. En kram	3	0

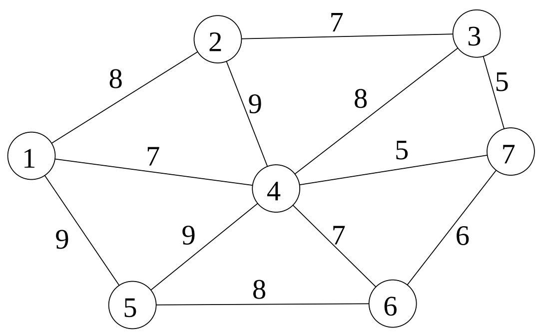
Hon vill ge mormor minst två saker och högst fyra (för att det ska bli rättvist jämfört med alla andra). Värdet för mormor ska maximeras. Kostnaden för Laisa ska vara högst 15. Godis och lussebullar riskerar att ge mormor ont i magen och hål i tänderna, så högst en av dessa får tas med. Att göra en akvarellmålning tar så mycket tid att Laisa inte hinner baka lussebullar. Mormor vill gärna ha något att förtära, så hon ska få minst en av godiset, likören och bullarna,

a) Formulera problemet att hitta de bästa julklapparna att ge mormor som ett linjärt optimeringsproblem med binära variabler. (2p)

b) Lös problemet i uppgift a med Balas metod. (2p)

Uppgift 5

a) Firma Tomtefrakt har fått ett antal beställningar avseende den 24/12. Ett antal säckar med okänt innehålla ska levereras till olika adresser. I följande graf har bågarna märkts med avstånd.



Man vill hitta en kortaste rundtur, som startar i nod 1 (skämtsamt kallad "nordpolen") och passerar alla andra noder, och återkommer till startpunkten. Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (2p)

b) Den 20/12 kommer det ett ordentligt snöfall. Alla vägarna i grafen blir ofarbara. De måste snabbt röjas. Man vill därför finna en billigaste rundtur som passerar alla bågar minst en gång. Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden. Ange rundtur och total kostnad. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (2p)

c) Efter kl 16 den 24/12 inkommer en begäran av en expressleverans från nod 1 till nod 7. Finn den kortaste vägen från nod 1 till nod 7 med lämplig metod. (En oriktad båge kan modelleras med två motriktade. Alternativ kan man implicit beakta båda riktningarna.) (2p)

Uppgift 6

Tomtefrakt har fått ett uppdrag att forsla ett antal säckar (med okänt innehåll) mellan två platser. Det är 20 små och 10 stora säckar som ska transporteras. Tomtefrakt har inga lediga bilar, utan måste hyra skåpbilar för att kunna genomföra dessa transporter. Man kan hyra två olika storlekar, en lite större, typ 1, och en lite mindre, typ 2. Det kostar 3 att hyra en bil av typ 1 och 2 att hyra en bil av typ 2. I en bil av typ 1 får man in 5 små och 2 stora säckar, och i en bil av typ 2 får man in 2 små och 2 stora. Man sätter upp följande optimeringsproblem för att finna hur många bilar av varje sort det vore bäst att hyra. x_j är antal bilar av typ j.

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{då} & & 5x_1 + 3x_2 \geq 20 \\
& & 2x_1 + 2x_2 \geq 10 \\
& & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

Den gamle direktören, Niclas Claus, anser att man bara borde hyra bilar av typ 1. Vore det bäst? Bevisa detta eller finn den bästa lösningen. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (Tips: Kom ihåg att det är ett minimeringsproblem.) (3p)

Uppgift 7

I djupaste Småland har Julia öppnat en tomteverkstad. Den har fem stationer, och på varje station ska en person sitta och göra ett visst arbetsmoment, till tonerna av Schuberts militärmarsch. Man har fått många ansökningar från jobbsökande, och har plockat fram fem bra sökande, som man har anställt. Genom att läsa ansökningshandlingarna noggrant, ser man att de fem personerna är olika bra på de olika momenten. Därför vill man finna den optimala placeringen av personerna.

Man sammanställer en matris med kostnader för varje person och varje moment (baserat på risken att göra fel, vilket skulle försinka hela kedjan). Man vill finna den utplacering som ger den minsta kostnaden. Varje person ska göra ett moment, och varje moment ska göras av en person. Raderna står för olika personer och kolumnerna står för olika moment.

$$
C = \begin{pmatrix}
7 & 15 & 8 & 5 & 7 \\
6 & 17 & 7 & 6 & 8 \\
9 & 16 & 9 & 8 & 9 \\
8 & 13 & 8 & 7 & 10 \\
6 & 14 & 8 & 5 & 9
\end{pmatrix}
$$

Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)