Fö 10:

July 14, 2020

Inversa matriser

Repetera att en avbildning $f : X \to Y$ är en regel som till varje $x \in X$ ordnar ett element $y \in Y$ betecknat med $f(x)$. Avbildningen f säges vara

- *injektiv* om $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *surjektiv* om för varje $y \in Y$ finns $x \in X$ s. a. $f(x) = y$;
- *bijektiv* om f är både injektiv och surjektiv.

Den sista är ekvivalent med följande:
för *varje* element $y \in Y$ har ekv $y = f(x)$ *exakt en lsg*, ett element $x \in X$,

d v s man har en avbildning $f^{-1} : Y \to X$ definierad av $f^{-1}(y) = x$, *inversen till* f.

Obs $f^{-1}(f(x)) = x$ för varje $x \in X$ och $f(f^{-1}(y)) = y$ för varje $y \in Y$.

Definition (s. 305): Låt A vara en $(n \times n)$-matris och $T_A : R^n \to R^n$ en linjär avbildning definierad av $T_A(\overline{x}) = A \cdot \overline{x}$, där $\overline{x}$ är en $(n \times 1)$-matris, ett element i R^n.
Vi säger att A är *inverterbar* om T_A är bijektiv. (Obs att T_A^{-1} existerar.)

Exempel 1. Avgör om följande matriser är inverterbara: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lsg. Ställ upp ekv $T_A(\overline{x}) = \overline{y}$. Finns det lsgar för varje $\overline{y}$? Hur många?
Svar. A_1 nej, A_2 ja.

Sats. Om avbildning $T : R^n \to R^n$ är linjär och bijektiv så är inversen T^{-1} också linjär och bijektiv. (Samma gäller även allmäna linjära avbildningar.)
Bevis. Kontrollera följande likheter genom att betrakta T av VL och HL:
(1) $T^{-1}(\overline{u} + \overline{v}) = T^{-1}\overline{u} + T^{-1}\overline{v}$, (2) $T^{-1}(\lambda \cdot \overline{u}) = \lambda \cdot T^{-1}\overline{u}$ för alla $\overline{u}, \overline{v}$,
eller se nästa exempel.

• Om vi har $T(\overline{x}) = A \cdot \overline{x} = \overline{y}$ och $T^{-1}(\overline{y}) = B \cdot \overline{y} = \overline{x}$ så kallas B *inversen till* A och betecknas med A^{-1} (s. 305).

Exempel 2. Undersök om matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ är inverterbar och bestäm A^{-1}.

Lsg. Ställ upp systemet (*) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$. Lös detta.

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 3 & y_1 \\ 2 & -1 & y_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -7 & (-2y_1 + y_2) \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7}(-2y_1 + y_2) \end{array}\right)$$

Obs att det finns precis en lsg för varje vektor $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow A$ är inverterbar.

Bestäm A^{-1} genom att lösa ut vektor $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ur (*).

Fortsätt med radoperationer på matriser.

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7}(-2y_1 + y_2) \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & \frac{1}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2 \\ x_2 = \frac{2}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_2 \end{cases}$. Koefficientplockning ger $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

• En inspektion av föregående ger ett snabbare sätt att finna A^{-1}:

Ställ upp matrisen $(A|E)$, använd radoperationer för att få fram matrisen $(E|B)$. Matrisen B är lika med A^{-1}.

För exemplet ovan får man

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}$$

• Obs $A^{-1} \cdot A = E$ och $A \cdot A^{-1} = E$, där E är en enhetsmatris

(De här likheterna gäller även allmänt, för att motivera dem använd sammansättningsregeln för T, T^{-1} och observera att för avbildningen $id(\overline{x}) = \overline{x}$, där $\overline{x} \in R^n$, är avbildningsmatrisen lika med E).

Alternativ definition: A är inverterbar om det finns en matris B s. a. $AB = E$ och $BA = E$, matrisen B kallas inversen till A och betecknas med A^{-1}.

Andra sätt att avgöra om en kvadratisk matris är inverterbar.

Sats: Låt $T_A : R^n \to R^n$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatrisen A. Då är följande påståenden ekvivalenta.

(i) T_A är bijektiv ($\Leftrightarrow A^{-1}$ existerar);

(ii) T_A är injektiv ($\Leftrightarrow$ nollrummet till $A = \{\overline{0}\}$);

(iii) T_A är surjektiv ($\Leftrightarrow$ kolonnrummet till $A = R^n$);

(iv) $\det A \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ ekv $AX = B$ har precis en lsg för varje kolonnmatris B).

Följd: Om $AC = E$ (då är T_A surjektiv, använd (iii)) eller $CA = E$ (då är T_A injektiv, använd (ii)) så existerar A^{-1} och $A^{-1} = C$.

En tillämpning av inversa matriser.

Exempel 3. Lös systemet (*) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$.

Lsg. Systemet (*) kan skrivas av formen $AX = B$.

Koefficientmatrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ är inverterbar (se föregående exempel) $\Rightarrow$ A^{-1} existerar och $X = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• *Cramers regel* att lösa ett kvadratiskt linjärt system:

Låt $AX = B$, där $A = (K_1|K_2|\dots|K_n)$ är en $(n \times n)$-matris med kolonnerna $K_1, \dots, K_n$ och $\det A \neq 0$. Då är $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i \leq n$, där $\Delta = \det A$, $\Delta_1 = \det(B|K_2|\dots|K_n)$, $\Delta_2 = \det(K_1|B|\dots|K_n)$ och $\Delta_n = \det(K_1|K_2|\dots|B)$.

I Exempel 3 har vi $\det A = \Delta = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ och $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$. Då är $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{7}$ och $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{7}$.

• Obs att Cramers regel kan även användas för att få fram inverser av inverterbara kvadratiska matriser.

• *Andra egenskaper hos inverterbara matriser.*

Sats: Låt A, B vara inverterbara matriser av samma typ. Då gäller

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Obs ordningen !);

(ii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;

(iii) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Bevis: till ex. (i). Obs att $AB(B^{-1}A^{-1}) = AEA^{-1} = E$. Sä är $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exempel 4. Låt $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Finn $\det B^{-1}$.

Lsg. Obs $\det B = -26$. Då är $\det B^{-1} = -\frac{1}{26}$.

Isometriska avbildningar och ON-matriser

Definition (s. 314). En linjär avbildning $T : R^n \to R^n$ är *isometrisk*

om $|T(\overline{x})| = |\overline{x}|$ för alla $\overline{x} \in R^n$ (d v s längderna bevaras).

Avbildningsmatrisen A föt T kallas *en ON-matris.*

Egenskaper hos isometriska avbildningar:

1. $|A\overline{x}| = |\overline{x}|$ för alla $\overline{x} \in R^n$.
2. $A\overline{x} \cdot A\overline{y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ för alla $\overline{x}, \overline{y} \in R^n$ (skalärprodukterna bevaras).
3. Vinkeln mellan två godtyckliga vektorer bevaras.
4. T är injektiv och A inverterbar.

Låt $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ vara standardbasen i R^n. Repetera att $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$,

$A = [A\overline{e}_1| \dots |A\overline{e}_n]$ och $A^tA = \begin{pmatrix} A\overline{e}_1 \cdot A\overline{e}_1 & \dots & A\overline{e}_1 \cdot A\overline{e}_n \\ & \dots & \\ A\overline{e}_n \cdot A\overline{e}_1 & \dots & A\overline{e}_n \cdot A\overline{e}_n \end{pmatrix}$.

Sats. En kvadratisk matris A är en ON-matris $\Leftrightarrow$ kolonnvektorerna är ortonormerade (d v s $A^t \cdot A = E$).

Följd (s. 318). En kvadratisk matris A är en ON-matris $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^t$.

• *Alternativ definition:* En kvadratisk matris A är en ON-matris om $A^t \cdot A = E$ (eller $A \cdot A^t = E$).

Exempel 5. Avgör vilka av matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ som är ON-matriser. Svar: C. (Tips: kolla kolonnvektorerna.)

- Det går att visa (s. 317) att samtliga ON-matriser av typ (2×2) är antingen

  $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ (en rotation) eller

  $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (en spegling följd av en rotation).

Exempel 6. Finn A^{-1} om $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Lsg. Obs att A är en ON-matris. $\Rightarrow$ $A^{-1} = A^t$.

- *Andra egenskaper hos ON-matriser.*

  1. Om A är en ON-matris så är $\det A = \pm 1$.
  2. Om A är en ON-matris så är A^t en ON-matris.
  3. Om A är en ON-matris så är radvektorerna ortonormerade.