Fö 11:

July 15, 2020

Egenvärde och egenvektor

Definition (s. 329): Låt A (resp. $T : R^n \to R^n$) vara en $(n \times n)$-matris (resp. en linjär avbildning). En icke-trivial vektor $\overline{v} \in R^n$ kallas *en egenvektor* till A (resp. till T) med *egenvärde* λ om $A \cdot \overline{v} = \lambda \overline{v}$ (resp. $T(\overline{v}) = \lambda \overline{v}$).

Exempel 1. Kontrollera att angivna vektorer är egenvektorer till motsvarande matriser.

(i) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (en likformig expansion med faktor 2),

alla vektorer i R^2 utom nollvektorn är egenvektorer till A_1;

(ii) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (en expansion längs axlarna),

vektorer $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in R \setminus 0$, är egenvektorer till A_2 med egenvärde 2 och

vektorer $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$, $s \in R \setminus 0$, är egenvektorer till A_2 med egenvärde 3;

(iii) $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (en rotation 30 grader moturs),

inga egenvektorer, inte heller egenvärden.

• *Hur hittar man egenvektorer och egenvärden till en kvadratisk matris ?*

Observera att

1) $A \cdot \overline{v} = \lambda \overline{v} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda E) \cdot \overline{v} = \overline{0}$ (*) och

2) ekv (*) har icke-triviala lsgar m a p $\overline{v} \;\Leftrightarrow\; \det(A - \lambda E) = 0$ (*en sekularekvation*).

Sats (s. 338): Talet λ^* är ett egenvärde till $A \;\Leftrightarrow\; \lambda^*$ är en rot till sekularekvationen.

Exempel 2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Lsg: Betrakta sekularekv $\det(A - \lambda E) = 0$ eller $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.
Det finns två lsgar: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$ (alla egenvärden till A).

Motsvarande egenvektorer:

Fall $\lambda_1 = 2$: lös ekv (*) $(A - 2E) \cdot \overline{v} = \overline{0}$. Lsgsmängden är $\begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}$, $t \in R$.

Samtliga egenvektorer som svarar mot $\lambda_1 = 2$ är $\begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in R \setminus 0$.

Fall $\lambda_2 = 7$: lös ekv (*) $(A - 7E) \cdot \overline{v} = \overline{0}$. Lsgsmängden är $\begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}$, $s \in R$.

Samtliga egenvektorer som svarar mot $\lambda_2 = 7$ är $\begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in R \setminus 0$.

Obs att egenvektorerna $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende och de bildar en bas för R^2.

• För tillämpningar är det viktigt när man för en given $(n \times n)$-matris kan hitta en bas för R^n bestående av egenvektorer (d v s när det finns n linjärt oberoende egenvektorer).

Men så är det inte alltid. Om A är $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (en rotation 30 grader moturs), finns det inga egenvektorer och således finns ingen bas av egenvektorer.

Basbyte

Låt V vara ett vektorrum och $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ en bas för V.

Betrakta en vektor $\overline{x} \in V$. Obs att $\overline{x} = x_1 \cdot \overline{v}_1 + \ldots + x_n \cdot \overline{v}_n = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Beteckna $\mathcal{G} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$ och $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ (*koordinatmatrisen* för $\overline{x}$ i basen $\mathcal{G}$).

Då är $\overline{x} = \mathcal{G} \cdot X$.

Låt $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n$ vara en annan bas för V. Obs $\overline{w}_1 = \mathcal{G} \cdot W_1, \ldots, \overline{w}_n = \mathcal{G} \cdot W_n$,
där $W_1, \ldots, W_n$ är koordinatmatriserna för vektorerna $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n$ i basen $\mathcal{G}$.

Beteckna $\mathcal{F}= (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n)$ och $P = [W_1|\ldots|W_n]$ (*basbytesmatrisen från $\mathcal{G}$ till $\mathcal{F}$*).
• Notera att $\mathcal{F} = \mathcal{G}{\cdot}P$.
Analogt, det finns en matris Q (*basbytesmatrisen från $\mathcal{F}$ till $\mathcal{G}$*) s. a. $\mathcal{G} = \mathcal{F}{\cdot}Q$.
• Notera att $P = Q^{-1}$ ty $\mathcal{F} = \mathcal{G}{\cdot}P = (\mathcal{F}{\cdot}Q)\cdot P = \mathcal{F}{\cdot}(QP)$ och $QP = E$ ($\mathcal{F}$ är ju en bas).

På samma sätt har vi $\overline{x} = y_1\cdot\overline{w}_1 + \ldots + y_n\cdot\overline{w}_n = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathcal{F}{\cdot}Y,$

där $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ (*koordinatmatrisen* för $\overline{x}$ i basen $\mathcal{F}$).

Sammanfatta $\overline{x} = \mathcal{F}{\cdot}Y = (\mathcal{G}{\cdot}P)\cdot Y = \mathcal{G}{\cdot}(P\cdot Y) = \mathcal{G}{\cdot}X.$

• Då gäller $X = P\cdot Y$ (ty $\mathcal{G}$ är en bas). Analogt, $Y = Q\cdot X$.
(Sambandet mellan koordinatmatriserna för samma vektor i olika baser.)

Exempel 3. Låt $\mathcal{E}= (\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ vara standardbasen för R^2 och $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Visa att $\mathcal{F}= (\overline{f}_1, \overline{f}_2)$ också är en bas för R^2. Finn basbytesmatriserna från $\mathcal{E}$ till $\mathcal{F}$ och från $\mathcal{F}$ till $\mathcal{E}$ samt koordinaterna av vektorn $\overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i basen $\mathcal{F}$.

Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{x} = 3\cdot\overline{f}_1 - \frac{2}{3}\cdot\overline{f}_2$.

Sats.

(i) Om $\mathcal{G}$ och $\mathcal{F}$ är ON-baser för V så är P och Q ON-matriser och $P = Q^t$.

(ii) Om $\mathcal{G}$ är en ON-bas för V och P en ON-matris så är $\mathcal{F}$ en ON-bas för V och vice versa.

Bevis (1): Notera att $\mathcal{F}^t\cdot\mathcal{F} = E$, $\mathcal{G}^t\cdot\mathcal{G} = E$ och $P^t\mathcal{G}^t\mathcal{G}P = P^tP = E$. Analogt, med Q. Visa själva (2).

Basbyten och linjära avbildningar

Låt $f : R^n \to R^m$ vara en linjär avbildning mellan R^n med basen $\mathcal{G}= (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ och R^m med basen $\mathcal{G}'= (\overline{v}'_1, \ldots, \overline{v}'_m)$.
Betrakta en vektor $\overline{x} = \mathcal{G}X \in R^n$, där X är koordinatmatrisen för $\overline{x}$ i basen $\mathcal{G}$.
Obs att $f(\overline{x}) = x_1{\cdot}f(\overline{v}_1) + \ldots + x_n{\cdot}f(\overline{v}_n) = f(\mathcal{G})X = \mathcal{G}'AX$, där $A = [[f(\overline{v}_1)]_{\mathcal{G}'}|\ldots|[f(\overline{v}_1)]_{\mathcal{G}'}]$ och $[f(\overline{v}_i)]_{\mathcal{G}'}$ är koordinatmatrisen för $f(\overline{v_i})$ i basen $\mathcal{G}'$ för varje i.

• Matrisen A är *avbildningsmatrisen* för f m a p baserna $\mathcal{G}$ och $\mathcal{G}'$.

Nu betraktar vi en ny bas $\mathcal{F}= (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n)$ i R^n och en ny bas $\mathcal{F}'= (\overline{w}'_1, \ldots, \overline{w}'_m)$ i R^m.
Låt $\mathcal{F} = \mathcal{G}P$ och $\mathcal{F}' = \mathcal{G}'P'$.
Obs att $f(\overline{x}) = f(\mathcal{F})Y = \mathcal{F}'BY$, här Y är koordinatmatrisen för $\overline{x}$ i basen $\mathcal{F}$ och $B = [[f(\overline{w}_1)]_{\mathcal{F}'}| \ldots |[f(\overline{w}_n)]_{\mathcal{F}'}]$, där $[f(\overline{w}_i)]_{\mathcal{F}'}$ är koordinatmatrisen för $f(\overline{w_i})$ i basen $\mathcal{F}'$ för varje i.

• Matrisen B är avbildningsmatrisen för f m a p baserna $\mathcal{F}$ och $\mathcal{F}'$.
Notera att $\mathcal{F}'BY = \mathcal{G}'P'BP^{-1}X = \mathcal{G}'AX$. Detta medför

• $A = P'BP^{-1}$ (*sambandet mellan avbildningsmatriserna i olika baser*).

I fall $n = m$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ och $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ får vi $P = P'$ och formeln $A = PBP^{-1}$.

• Om $BY = \lambda Y$ för något λ så är $AX = PBP^{-1}PY = PBY = P(\lambda Y) = \lambda PY = \lambda X$.

På vektorform har vi $f(\overline{x}) = f(\mathcal{G}X) = \mathcal{G}AX = \mathcal{G}\lambda X = \lambda\mathcal{G}X = \lambda\overline{x}$.

Exempel 4. Låt $T : R^2 \to R^2$ vara en linjär avbildning och $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ är egenvektorerna för T med egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -3$ resp. d v s $T(\overline{f}_i) = \lambda_i \overline{f}_i, i = 1, 2$.
Finn avbildningsmatrisen för T (i standardbasen $\mathcal{E}$).

Lsg. Låt $\mathcal{G} = \mathcal{E}$ och $\mathcal{F} =(\overline{f_1}, \overline{f_2})$. Notera att $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (ty $T(\overline{f}_1) = 2 \cdot \overline{f}_1$ och $T(\overline{f}_2) = -3 \cdot \overline{f}_2$) och $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (se Exempel 3). Så $A = PBP^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 30 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

(Ortogonal) diagonaliserbarhet

Definition (s. 380). En kvadratisk matris A är *(resp. ortogonalt) diagonaliserbar* om det finns en inverterbar (resp. ON)-matris P och en diagonalmatris D s. a.
$A = PDP^{-1}$ (resp. $A = PDP^t$).
Obs två definitioner i en.

• $A = PDP^{-1} \;\Leftrightarrow\; AP = PD$ eller $[A \cdot \overline{p}_1| \ldots |A \cdot \overline{p}_n] = [\lambda_1 \cdot \overline{p}_1| \ldots |\lambda_n \cdot \overline{p}_1]$,
där $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \ldots \\ p_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, \overline{p}_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ \ldots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$ (P's kolonner) och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Obs att vektorn $\overline{p}_1$ är en egenvektor till A med egenvärde λ_1, ..., vektorn $\overline{p}_n$ är en egenvektor till A med egenvärde λ_n.

Sats (s. 380). Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Då gäller att
A är (resp. ortogonalt) diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A har n stycken (resp. parvis ortogonala)

linjärt oberoende egenvektorer.

• Om A har n stycken *olika* egenvärden så har A n linjärt oberoende egenvektorer (s. 381).

• A har n stycken parvis ortogonala linjärt oberoende egenvektorer $\Leftrightarrow$ A är symmetrisk (s. 346).

Obs att om A är ortogonalt diagonaliserbar så är A diagonaliserbar.

Exempel 5. Matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar men inte ortogonalt diagonaliserbar.

Exempel 6. Diagonalisera (ortogonalt) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ d v s finn matriser P och D.

Lsg. Repetera att A har två egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 7$ och $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $\Rightarrow$ Det går att diagonalisera A. Ta egenvektorer $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\overline{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och bilda matrisen $P = [\overline{p}_1 | \overline{p}_2] = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obs att $A \cdot P = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

• *Är A ortogonalt diagonaliserbar?* Svar: Ja.

Obs att $\overline{p}_1 \perp \overline{p}_2$ (ty A är symmetrisk och $\lambda_1 \neq \lambda_2$).
Normera vektorerna: $\overline{p}_1' = \frac{1}{|\overline{p}_1|} \cdot \overline{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\overline{p}_2' = \frac{1}{|\overline{p}_2|} \cdot \overline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Obs att $\overline{p}_1', \overline{p}_2'$ är en ON-bas för R^2, matrisen $P' = [\overline{p}_1' | \overline{p}_2']$ är en ON-matris och $A = P' \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot (P')^t$.

Exempel 7. Finn A^{100}, där $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Svar: obs att $A^m = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1}) = PD^mP^{-1}$ för alla positiva heltal m.
Så får man $A^{100} = P' \cdot \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 7^{100} \end{pmatrix} \cdot (P')^t$ (använd Exempel 6) eller

$$A^{100} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 7^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} (2^{100} + 4 \cdot 7^{100}) & (-2^{101} + 2 \cdot 7^{100}) \\ (-2^{101} + 2 \cdot 7^{100}) & (2^{102} + 7^{100}) \end{pmatrix}.$$

Kolla ex 7.17 för (3×3)-matriser.