Fö 12:

July 15, 2020

Diagonalisering och differentialekvationssystem

I analys visar man att samtliga lösningar till diffekv $y' = a \cdot y$ kan skrivas i formen $y = c \cdot e^{at}$, där c är en godtycklig konstant.

Exempel 1: Finn samtliga lsgar till diffekvssystemet: $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$

Lsg: Skriv om systemet på matrisform: (*) $Y' = AY$, där $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- *Är A diagonaliserbar?*

Betrakta sekularekvationen $|A - \lambda E| = 0$ eller $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.
Det fiins två *olika* rötter: $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4 \Rightarrow A$ är diagonaliserbar.

Finn motsvarande egenvektorer:

fall λ_1 : lös systemet $(A - E)X = 0 \Rightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$ (samtliga egenvektorer för λ_1).

fall λ_2 : lös systemet $(A - 4E)X = 0 \Rightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$ (samtliga egenvektorer för λ_2).

Notera att egenvektorerna $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ utgör en bas för R^2.

Bilda matriserna $P = [\overline{p}_1 | \overline{p}_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Obs att $A = PDP^{-1}$.

Insättning i (*) ger $Y' = (PDP^{-1})Y$ eller $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$ eller $(P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y)$.

Inför $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P^{-1}Y$ (obs att $Y = PZ$). Då får man $Z' = DZ$ eller $\begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = 4z_2 \end{cases}$ (**).

Använd analysen för att lösa ut z_1 och z_2 ur (**):

$\begin{cases} z_1 = c_1 \cdot e^t \\ z_2 = c_2 \cdot e^{4t} \end{cases}$, där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

Få fram lösningsmängden till (*): $Y = PZ = [\overline{p}_1 | \overline{p}_2] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t \\ c_2 \cdot e^{4t} \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^t \cdot \overline{p}_1 + c_2 \cdot e^{4t} \cdot \overline{p}_2$, där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter (*den allmänna lsgen till (*)*).

Extra fråga. Finn den lsg som uppfyller villkoren: $y_1(0) = 3$ och $y_2(0) = 5$.

Lsg: Sätt $t = 0$ in i den allmänna lsgen och jämför med givna villkoren:

$c_1 \cdot e^0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ eller $\begin{cases} -c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{3}$ och $c_2 = \frac{8}{3}$.

Svar: $Y(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^t \cdot \overline{p}_1 + \frac{8}{3} \cdot e^{4t} \cdot \overline{p}_2$, $t \in R$.

Sammanfatta.

Sats. Låt A vara en $(n \times n)$-matris som har n linjärt oberoende egenvektorer $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n$ med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ resp. Då är summan

$c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \overline{p}_1 + \ldots + c_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \overline{p}_n$, där $c_1, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter, den allmänna lsgen till systemet: $Y' = AY$.

Kvadratiska former

Definition (s. 384) . Ett uttryck som kan skrivas i formen

$Q(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, där A är en $(n \times n)$ *symmetrisk* matris, kallas *en kvadratisk form* i variablerna $x_1, \ldots, x_n$.

Exempel 2. Kontrollera likheterna:

1. $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (kvadratisk form i x, y)

2. $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz =$

   $(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (kvadratisk form i x, y, z)

- Obs att $Q(x_1, \ldots, x_n)$ kan tolkas som en avbildning från R^n till R och betecknas $Q(\overline{x})$.

Diagonalisering av kvadratiska former

Förenkla en kvadratisk form genom att införa nya variabler i R^n.

- A är symmetrisk $\Rightarrow$ A är ortogonalt diagonaliserbar, d v s det finns en ON-matris P och en diagonal matris D s. a. $A = PDP^t$ (repetera att $P^t = P^{-1}$).

- $P = [\overline{p}_1|\ldots|\overline{p}_n]$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, där $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n$ är ett ON-system av egenvektorer (en ON-bas i R^n) med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, resp.

- Låt $Y = P^t X$ (en variabelsubstitution från gamla X till nya Y). Då är

  $Q(\overline{x}) = Q(x_1, \ldots, x_n) = X^t AX = (X^t P)D(P^t X) = Y^t DY =$

  $\lambda_1 \cdot y_1^2 + \ldots + \lambda_n \cdot y_n^2 = Q(y_1, \ldots, y_n)$. Nu är Q förenklad (*diagonaliserad).*

Exempel 3. Diagonalisera den kvadratiska formen $Q(x, y) = 9x^2 + 4xy + 6y^2$ d v s finn matriser P och D, ange variabelsubstitution samt skriv Q i nya variabler i diagonaliserad form.

Lsg. Obs att $Q = (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, där $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Egenvärden: $|A - \lambda \cdot E| = 0$ eller $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$. $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10$.

Motsvarande egenvektorer: $\lambda_1 : t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in R \setminus 0$, och $\lambda_2 : s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in R \setminus 0$.

Plocka fram två linjärt oberoende egenvektorer och normera dem.
$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Obs att $\overline{v}_1 \perp \overline{v}_2$), $\overline{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\overline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matriserna: $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Variabelsubstitution: obs att $P^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (nya uttryckta i gamla).

Diagonaliserad Q i de nya variablerna u, v: $Q(u, v) = 5u^2 + 10v^2$.

Kolla ex. 8.16 (s. 389)

Definition. *Ett andragradspolynom* i två variabler x och y är
$p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ (*), där a, b, c, d, e, f är konstanter.

Uttrycket $ax^2 + 2bxy + cy^2$ är *den kvadratiska delen* och resten är *den linjära delen.*

En andragradskurva är lösgsmängden till ekv $p(x, y) = 0$ i x, y-koordinatsystem.

Exempel 4. Bestäm den geometriska betydelsen av ekv $9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 5 = 0$ (#).

Lsg. Ortogonalt diagonalisera den kvadratiska delen KD.

Obs att $KD = (x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, där $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Använd förra exemplet. Egenvärden: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10$.

En ON bas av motsvarande egenvektorer: $\overline{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\overline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matriserna: $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Sambandet mellan två variabelsystem: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Insättning av HL av andra formeln i ekv (#) istället för x_1, x_2 transformerar ekv till

ekv $5y_1^2 + 10y_2^2 - 5 = 0$ eller $y_1^2 + 2y_2^2 = 1$ (##) (*en ellips*).

Först, rita ellipsen i y_1, y_2-koordinatsystem. Sedan i x_1, x_2-koordinatsystem placera y_1, y_2-axlarna (använd $\overline{p}_1$ och $\overline{p}_2$ avsatta i origo för att få y_1, y_2-riktningar) samt ellipsen från första bilden. Vi får lsgsmängden till ekvationen (#) i x_1, x_2-koordinatsystem.

Värdemängder till kvadratiska former

Sats (s. 391). Låt $Q = X^tAX$, där A är symmetrisk och λ_{min}, λ_{max} minsta resp. största egenvärde till A. Då gäller $\lambda_{min}|\overline{x}|^2 \leq Q(\overline{x}) \leq \lambda_{max}|\overline{x}|^2$ för varje vektor $\overline{x}$.

Om $\overline{p}_{min}$ ($\overline{p}_{max}$) är en egenvektor med egenvärde λ_{min} (resp. λ_{max}) så är
$Q(\overline{p}_{min}) = \lambda_{min} \cdot |\overline{p}_{min}|^2$ och $Q(\overline{p}_{max}) = \lambda_{max} \cdot |\overline{p}_{max}|^2$.

Bevis. Diagonalisera formen: $X^tAX = Y^tDY = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. Notera att
$|X| = |Y|$ ty $X = PY$ och P är en ON matris, och
$\lambda_{min} \cdot |Y|^2 = \lambda_{min} \cdot (y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leq \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n \cdot y_n^2 \leq \lambda_{max} \cdot (y_1^2 + \ldots + y_n^2) = \lambda_{max} \cdot |Y|^2$.

Exempel 5. Bestäm minsta samt största värde av $Q = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$ på sfären $|\overline{x}|^2 = 1$ (ekvivalent $|\overline{x}| = 1$).

Lsg. min $= 5$ (antas på $\pm\overline{p}_1$) och max $= 10$ (antas på $\pm\overline{p}_2$.)

- *Vad är min och max av Q på $|\overline{x}| = 3$?*
  Svar: min $= 5 \cdot 3^2$ (antas på $\pm 3 \cdot \overline{p}_1$) och max $= 10 \cdot 3^2$ (antas på $\pm 3 \cdot \overline{p}_2$.)

Klassificering av kvadratiska former

- En kvadratisk form Q är

  1. *positivt definit (positivt semidefinit)* om $\lambda_{min} > 0$ ($\lambda_{min} = 0$);
  2. *negativt definit (negativt semidefinit)* om $\lambda_{max} < 0$ ($\lambda_{max} = 0$);
  3. *indefinit* om $\lambda_{min} \cdot \lambda_{max} < 0$ (s. 392).

Exempel 6. Av vilken typ är $Q = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$?

Svar. Q är *positivt definit* ty $\lambda_{min} = 5 > 0$.