Fö 1:

September 15, 2022

Vektorer

Betrakta ett plan (eller ett rum).

• *En riktad sträcka* $\overline{PQ}$ i planet (eller i rummet), där $P \neq Q$, är en pil med foten i P och med spetsen i Q.
Denna har

(i) en riktning, och

(ii) en nollskild längd betecknad $|\overline{PQ}|$.

Man använder riktade sträckor för behandling av företeelser som förutom mätetal också har en riktning. Till ex. en kraft eller en hastighet.

• *En nollsträcka* $\overline{PP}$ börjar och slutar i samma punkt P.
Denna har längden 0 och saknar en riktning.

Definition (sid. 8):

(i) *Nollvektorn* $\overline{0}$ är mängden av alla nollsträckor.

(ii) *En (nollskild) vektor* $\overline{u}$ är en mängd av alla riktade sträckor med samma (nollskild) längd och samma riktning.

Låt $\overline{PQ}$ vara ett element av någon $\overline{u}$. (Vi ska även skriva $\overline{PQ} = \overline{u}$.) Då är *riktningen av* $\overline{u}$ = riktningen av $\overline{PQ}$ och *längden av* $\overline{u}$= $|\overline{PQ}|$ (betecknad $|\overline{u}|$).

Observera att riktningen och längden definierar ENTYDIGT en nollskild vektor.

Om $|\overline{u}| = 1$ kallas $\overline{u}$ *en enhetsvektor.*

Vektorn $\overline{v} = \overline{QP}$ betecknas $-\overline{u}$
(denna har motsatt riktning men samma längd som $\overline{u}$).

Exempel 1:

(1) Om riktningen av $\overline{PQ}$ = riktningen av $\overline{AB}$ och längden av $\overline{PQ}$ = längden av $\overline{AB}$ så är $\overline{PQ} = \overline{AB}$ (hör till samma vektor).

(2) Om antingen riktningen av $\overline{PQ} \neq$ riktningen av $\overline{AB}$ eller längden av $\overline{PQ} \neq$ längden av $\overline{AB}$ så är $\overline{PQ} \neq \overline{AB}$ (hör ej till samma vektor).

- *Möjliga beteckningar av vektorer*: $\overline{PQ}, \overline{AB}, \overline{u}, \overline{v}$ osv

  Fråga: Hur många olika vektorer finns det?
  Svar: Lika många som punkter i planet (rummet). En motivering följer.

- *Identifiering av vektorer och punkter i rummet (planet)*:

Fixera en punkt O (*origo*) i rummet. En godtycklig punkt A i rummet paras ihop med den riktade sträckan $\overline{OA}$ (som kallas *en ortsvektor* för punkten A) och varje riktad sträcka $\overline{OP}$ paras ihop med motsvarande vektor $\overline{u}$.

Operationer

Definition (Multiplikation av en vektor $\overline{u}$ med ett reellt tal k) (sida 10):

Låt $\overline{u}$ vara en vektor och k ett reellt tal. Vi definierar

(i) $0 \cdot \overline{u} = \overline{0}$ och $k \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

(ii) Om $k \neq 0$ och $\overline{u} \neq \overline{0}$ så är $k \cdot \overline{u}$ den vektor för vilken följande gäller

  (a) $|k \cdot \overline{u}| = |k| \cdot |\overline{u}|$;
  (b) om $k > 0$ så har vektorn $k \cdot \overline{u}$ samma riktning som vektorn $\overline{u}$ har, annars har vektorn $k \cdot \overline{u}$ samma riktning som vektorn $-\overline{u}$.

Obs att vektorerna $k \cdot \overline{u}$ och $\overline{u}$ är parallella.

Exempel 2:

(1) Betrakta vektorerna $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$. Rita $2 \cdot \overline{u}, 3 \cdot \overline{v}, (-1) \cdot \overline{w}$ (Obs att denna är $-\overline{w}$);

(2) Antag att $\overline{u} \neq \overline{0}$. Då är vektorn $\overline{e} = \frac{1}{|\overline{u}|} \cdot \overline{u}$ en enhetsvektor och $\overline{u} = |\overline{u}| \cdot \overline{e}$.

Notera att om $\overline{v}||\overline{u}$ så finns det en entydigt bestämd konstant k s. a. $\overline{v} = k \cdot \overline{u}$.

Verkligen, om $\overline{u}, \overline{v}$ har samma riktning så är $\overline{v} = |\overline{v}| \cdot \overline{e} = \frac{|\overline{v}|}{|\overline{u}|} \cdot \overline{u}$, annars

$\overline{v} = -|\overline{v}| \cdot \overline{e} = (-\frac{|\overline{v}|}{|\overline{u}|}) \cdot \overline{u}$.

Definition (Vektoraddition) (sid. 11):

Låt $\overline{u}, \overline{v}$ vara vektorer, och $\overline{AB}$ ett element av $\overline{u}$ och $\overline{BC}$ ett element av $\overline{v}$.
Vektorn $\overline{u} + \overline{v}$ är den vektor som har riktade sträckan $\overline{AC}$ som ett element.
(*triangelregeln*).

Obs att $\overline{A(B)} + \overline{(B)C} = \overline{AC}$.

Exempel 3:

(1) $(\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CD})$.
$((\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}).)$

(2) $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \overline{0}$.
$(\overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}.)$

(3) $2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC}$.
$(2 \cdot (\overline{u} + \overline{v}) = 2 \cdot \overline{u} + 2 \cdot \overline{v}.)$

Sats (Egenskaper) (sid. 12):
Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara vektorer och k, p reella tal. Då gäller

(1) $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$;

(2) $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} \qquad (= \overline{u} + \overline{v} + \overline{w})$;

(3) $\overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$;

(4) $\overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$;

(5) $(k + p) \cdot \overline{u} = k \cdot \overline{u} + p \cdot \overline{u}$;

(6) $k \cdot (\overline{u} + \overline{v}) = k \cdot \overline{u} + k \cdot \overline{v}$;

(7) $k \cdot (p \cdot \overline{u}) = (k \cdot p) \cdot \overline{u}$;

(8) $1 \cdot \overline{u} = \overline{u}$.

Exempel 4: $4 \cdot (2 \cdot \overline{u} + 3 \cdot \overline{v}) = 8 \cdot \overline{u} + 12 \cdot \overline{v}$.

- *Vektorsubtraktion*: $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} + (-1) \cdot \overline{v}$.

Obs att om $\overline{w} = \overline{u} - \overline{v}$ så är $\overline{u} = \overline{u} + \overline{0} = \overline{u} + ((-1) \cdot \overline{v} + \overline{v}) = \overline{w} + \overline{v}$ (det går att flytta över även vektorer i en likhet).

Definition:
Låt $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}$ vara vektorer och $k_1, \ldots, k_n$ reella tal.
Vektorn $k_1 \cdot \overline{v_1} + \ldots + k_n \cdot \overline{v_n}$ kallas *en linjärkombination* av vektorerna $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}$.

Exempel 5: Betrakta i rummet triangeln med hörn i punkterna O, A, B. Låt punkten M ligga på sträckan AB och $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$. Skriv vektorn $\overline{OM}$ som en linjärkombination av vektorerna $\overline{OA}$ och $\overline{OB}$.

Svar: $\overline{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overline{OB}$.

• *Projektion på en linje parallellt med en annan linje i planet* (sida 19):

Låt M, N vara två icke-parallella linjer i planet och P, A, B punkter där.
Projektionen av P på N parallellt med M, betecknad $\mathrm{pr}_N^M P$, är skärningspunkten av linjen N med den linje L som går genom P och är parallell med linjen M.

Projektionen av $\overline{AB}$ på N parallellt med M, betecknad $\mathrm{pr}_N^M \overline{AB}$, är $\overline{A'B'}$, där $A' = \mathrm{pr}_N^M A$ och $B' = \mathrm{pr}_N^M B$. Om $\overline{AB}$ är ett element av vektorn $\overline{u}$ så är *projektionen av $\overline{u}$ på N parallellt med M*, betecknad $\mathrm{pr}_N^M \overline{u}$, en vektor med $\mathrm{pr}_N^M \overline{AB}$ som ett element.

Om $M \perp N$ så är $\mathrm{pr}_N^M P = \mathrm{pr}_N P$, $\mathrm{pr}_N^M \overline{AB} = \mathrm{pr}_N \overline{AB}$ och $\mathrm{pr}_N^M \overline{u} = \mathrm{pr}_N \overline{u}$ (*den ortogonala projektionen*).

Exempel 6:

Låt $\overline{u}, \overline{v}$ vara vektorer i planet och k en konstant. Då är

(i) $\mathrm{pr}_N^M(\overline{u} + \overline{v}) = \mathrm{pr}_N^M \overline{u} + \mathrm{pr}_N^M \overline{v}$;

(ii) $\mathrm{pr}_N^M(k \cdot \overline{u}) = k \cdot \mathrm{pr}_N^M \overline{u}$;

(iii) $\overline{u} = \mathrm{pr}_N^M(\overline{u}) + \mathrm{pr}_M^N(\overline{u})$ (*komposantuppdelningen* av vektorn $\overline{u}$, sid. 18).

• *En bas i planet:* Två icke-parallella nollskilda vektorer i planet utgör en bas där.

Betrakta nollskilda vektorer $\overline{e_1}$ och $\overline{e_2}$ s. a. $\overline{e_1} || N$ och $\overline{e_2} || M$ (d v s $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ är en bas).
Observera (se Exempel 2) att för varje vektor $\overline{u}$ i planet finns det *entydigt bestämda* konstanter x, y s. a. $\mathrm{pr}_N^M(\overline{u}) = x \cdot \overline{e_1}$ och $\mathrm{pr}_M^N(\overline{u}) = y \cdot \overline{e_2}$. Vi har dessutom att $\overline{u} = x \cdot \overline{e_1} + y \cdot \overline{e_2}$.
Konstanterna x, y kallas *koordinater* av vektorn $\overline{u}$ i basen $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$.

Om $\overline{e_1} \perp \overline{e_2}$ så kallas basen $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ *ortogonal.*
Om basen $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ är ortogonal och $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = 1$ så kallas denna *ortonormal* (eller *en ON-bas*).

Fixera en bas $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ i planet.

• *Identifiering av vektorer med deras koordinater:* $\overline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

• *Addition och multiplikation på koordinatform*:
Om $\overline{u_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ och $\overline{u_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ så är

(i) $\overline{u_1} + \overline{u_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ ty $\overline{u_1} + \overline{u_2} = (x_1 \cdot \overline{e_1} + y_1 \cdot \overline{e_2}) + (x_2 \cdot \overline{e_1} + y_2 \cdot \overline{e_2}) =$
$(x_1 + x_2) \cdot \overline{e_1} + (y_1 + y_2) \cdot \overline{e_2}$;

(ii) $k \cdot \overline{u} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$ ty $k \cdot \overline{u} = k \cdot (x \cdot \overline{e_1} + y \cdot \overline{e_2}) = (k \cdot x) \cdot \overline{e_1} + (k \cdot y) \cdot \overline{e_2}$

Exempel 7: Låt $\overline{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\overline{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Då är $2 \cdot \overline{u_1} + 3 \cdot \overline{u_2} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• *Ett ortonormerat koordinatsystem (ett ON-system) i planet* är en punkt O (*origo*) och en ON-bas $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$.
Låt P vara en punkt i planet med ett ON-system $O\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$. Betrakta ortsvektorn $\overline{OP}$. Låt x, y vara $\overline{OP}$'s koordinater i basen $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$. Så är x, y också P's koordinater i systemet $O\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ (en beteckning $P(x, y)$).

Obs att $|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoros sats).

Om $\overline{OP}$ är ett element av en vektor $\overline{u}$ så är $|\overline{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

• *Avståndet mellan två punkter P_1 och P_2* är $|\overline{P_1P_2}|$.

Om $P_1(x_1, y_1)$ och $P_2(x_2, y_2)$ så är $\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} =$

$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ och $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Analogt i rummet (något förtydligare om baser i rummet se i Fö 2).