Fö 2:

July 5, 2020

Skalärprodukt

Definition (sid. 28): Låt $\overline{u}, \overline{v}$ vara vektorer i planet (rummet). *Skalärprodukten* $\overline{u} \cdot \overline{v}$ är ett tal som definieras av

(i) $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$ om $\overline{u} = \overline{0}$ eller $\overline{v} = \overline{0}$; annars

(ii) $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos\alpha$, där α är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

Exempel 1:

(1) $\overline{u} \cdot \overline{u} = |\overline{u}| \cdot |\overline{u}| \cdot \cos 0 = |\overline{u}|^2 \geq 0$ och $|\overline{u}| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$.

(2) $|\overline{u} \cdot \overline{v}| = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot |\cos\alpha| \leq |\overline{u}| \cdot |\overline{v}|$
(lägg märke till att $|\overline{u} + \overline{v}| \leq |\overline{u}| + |\overline{v}|$, *triangelsolikheten för summan*).

- Antag att $\overline{u}, \overline{v}$ är två nollskilda vektorer. Då är
  $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$ om och endast om $\cos\alpha = 0$ (d v s $\overline{u} \perp \overline{v}$).
  Vi säger att $\overline{u}, \overline{v}$ är *ortogonala* i fallet.

Exempel 2: Låt N vara en rät linje, $\overline{v}$ en nollskild vektor s. a. $\overline{v} || N$ och $\overline{u}$ en godtycklig vektor. Visa att $\mathrm{pr}_N \overline{u} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \cdot \overline{v}$ och $\mathrm{pr}_N \overline{u} \perp (\overline{u} - \mathrm{pr}_N \overline{u})$, där $\mathrm{pr}_N \overline{u}$ är den ortogonala projektionen av vektorn $\overline{u}$ på linjen N. Notera också att $\overline{u} \cdot \overline{v} = \mathrm{pr}_N \overline{u} \cdot \overline{v}$.

Sats (Egenskaper, sid. 30): Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara vektorer och k ett reellt tal. Då gäller

(i) $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$;

(ii) $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$;

(iii) $(k \cdot \overline{u}) \cdot \overline{v} = k \cdot (\overline{u} \cdot \overline{v})$;

(iv) $\overline{u} \cdot \overline{u} \geq 0$ och $\overline{u} \cdot \overline{u} = 0$ om och endast om $\overline{u} = \overline{0}$.

Bevis (ii): Låt $\overline{u} \neq \overline{0}$ och N vara en rät linje s. a. $N||\overline{u}$. Då gäller $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \mathrm{pr}_N(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot (\mathrm{pr}_N\overline{v} + \mathrm{pr}_N\overline{w}) = \overline{u} \cdot \mathrm{pr}_N\overline{v} + \overline{u} \cdot \mathrm{pr}_N\overline{w} = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$.

Exempel 3: Låt $\overline{u}, \overline{v}$ vara vektorer s. a. $|\overline{u}| = 2, |\overline{v}| = 3$ och vinkeln dem emellan är $\frac{\pi}{3}$.

Finn $s = (2 \cdot \overline{u} + 3 \cdot \overline{v}) \cdot \overline{v}$.

Räkna $s = 2 \cdot (\overline{u} \cdot \overline{v}) + 3 \cdot (\overline{v} \cdot \overline{v}) = 2 \cdot |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 3 \cdot |\overline{v}|^2 = 2 \cdot |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot |\overline{v}|^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3^3 = 33$.

- *Skalärprodukt på koordinatform:*

Sats (sid. 30): Om $\overline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ i en ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ i planet så är

$\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$. Bl. a. $|\overline{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Bevis: $\overline{u} \cdot \overline{v} = (x_1 \cdot \overline{e}_1 + y_1 \cdot \overline{e}_2) \cdot (x_2 \cdot \overline{e}_1 + y_2 \cdot \overline{e}_2) = (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_1) + (x_1 \cdot y_2) \cdot (\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2) + \ldots$ Observera att $\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_1 = 1$, $\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_1 = 0$ och $\overline{e}_2 \cdot \overline{e}_2 = 1$. Så är $\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.
Notera att $|\overline{u}| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Exempel 4: Finn vinkeln ϕ mellan vektorerna $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Observera att $cos(\phi) = (\overline{u} \cdot \overline{v})/(|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|) = \frac{2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 4^2}} = -\frac{2}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}$

- Analogt i rummet.

Vektorprodukt

Definition (sid. 41): Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara tre nollskilda vektorer i rummet som inte är parallella med samma plan. Trippeln $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ (Obs ORDNING) kallas *ett högersystem* om den minsta vridning som överför vektorn $\overline{u}$ till $\overline{v}$:s riktning ses moturs från spetsen av $\overline{w}$. Annars är trippeln $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ *ett vänstersystem.*

Exempel 5: Antag att $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ är ett högersystem.
Då är $(\overline{v}, \overline{u}, \overline{w})$, $(\overline{u}, \overline{v}, -\overline{w})$ vänstersystem.

Definition (sid. 42): Låt $\overline{u}, \overline{v}$ vara två icke-parallella nollskilda vektorer i *rummet* och ϕ vinkeln mellan dem. *Vektorprodukten* $\overline{u} \times \overline{v}$ är en ny vektor s. a.

(i) $\overline{u} \times \overline{v} \perp \overline{u}, \overline{v}$;

(ii) $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v})$ är ett högersystem;

(ii) $|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \sin(\phi)$

(*produkten är lika med arean* av parallellogram som spänns upp av vektorerna $\overline{u}, \overline{v}$).

- Om $\overline{u}||\overline{v}$ så är $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$. Samma gäller om $\overline{u} = \overline{0}$ eller $\overline{v} = \overline{0}$.

Låt $\pi_{\overline{u}}$ vara ett plan som är vinkelrät mot vektorn $\overline{u}$. Notera att $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{u} \times \mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}\overline{v}$, där $\mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}\overline{v}$ är den ortogonala projektionen av $\overline{v}$ på planet $\pi_{\overline{u}}$.

Exempel 6: Betrakta ett högersystem $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ av vektorer i rummet.

Antag att vektorerna $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ är parvis ortogonala och $\overline{e_i} = 1$ för varje i.
Då är $\overline{e_1} \times \overline{e_2} = \overline{e_3}$, $\overline{e_1} \times \overline{e_1} = \overline{0}$, $\overline{e_2} \times \overline{e_1} = -\overline{e_3}$, $\overline{e_1} \times \overline{e_3} = -\overline{e_2}$ o s v.

- Vad är $\overline{e_3} \times \overline{e_2}$? Svar: $-\overline{e_1}$.

Sats (Egenskaper, sid. 44): För vektorer $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ och tal k gäller följande

(i) $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$;

(ii) $(k \cdot \overline{u}) \times \overline{v} = k \cdot (\overline{u} \times \overline{v})$;

(iii) $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$.

Bevis av (iii): $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times (\mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}\overline{v} + \mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}\overline{w}) = \overline{u} \times \mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}\overline{v} + \overline{u} \times \mathrm{pr}_{\pi_{\overline{u}}}\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$.

- *En bas i rummet*: Tre nollskilda vektorer $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ som inte är parallella med samma plan utgör en bas i rummet.

Precis som i planet (se Fö1) kan varje vektor $\overline{w}$ i rummet skrivas som en linjär kombination av basvektorerna $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$: $\overline{w} = x \cdot \overline{e_1} + y \cdot \overline{e_2} + z \cdot \overline{e_3}$
(x, y, z definieras *entydigt* och kallas *koordinater* av $\overline{w}$ i basen).

Vi kan identifiera $\overline{w}$ med koordinaterna: $\overline{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- *En (högerorienterad) ON-bas i rummet*: Tre nollskilda vektorer $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ s. a. (trippeln $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ är ett högersystem) vektorerna är parvis ortogonala och $\overline{e_i} = 1$ för varje i, bildar en (högerorienterad) ON-bas i rummet.

Sats (Vektorprodukt på koordinatform) (sid. 46):

Låt $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ vara en högerorienterad ON-bas i rummet och $\overline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Då gäller $\overline{u} \times \overline{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \overline{e_1} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \cdot \overline{e_2} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \overline{e_3}$ eller

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Bevis: $(x_1 \cdot \overline{e}_1 + y_1 \cdot \overline{e}_2 + z_1 \cdot \overline{e}_3) \times (x_2 \cdot \overline{e}_1 + y_2 \cdot \overline{e}_2 + z_2 \cdot \overline{e}_3) =$
$(x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{e}_1 \times \overline{e}_1) + (x_1 \cdot y_2) \cdot (\overline{e}_1 \times \overline{e}_2) + \ldots$
Observera att $\overline{e}_1 \times \overline{e}_1 = \overline{0}$ och $\overline{e}_1 \times \overline{e}_2 = \overline{e}_3$.
Så är $\overline{u} \times \overline{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \overline{e}_1 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \cdot \overline{e}_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \overline{e}_3$.

Exempel 7: $|\overline{u} \times \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 \cdot |\overline{v}|^2 - (\overline{u} \cdot \overline{v})^2$ (kontrollera själva!)

- *Trippelprodukt av vektorer* $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ är $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}$.

Låt $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ vara en högerorienterad ON-bas i rummet och

$\overline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ och $\overline{w} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Då är $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) x_3 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) z_3 =$$

$$(x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3) - (x_3 y_2 z_1 + y_3 z_2 x_1 + z_3 x_2 y_1) =$$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ (*en determinant*).

- Observera att tre nollskilda vektorer $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ ligger i samma plan om och endast om $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = 0$. (Resonera med en bild.)

Exempel 8: *Volymen* V av parallellepiped som spänns upp av tre nollskilda vektorer $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ är $|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|$.