Fö 3:

September 17, 2020

Räta linjer

Vi ska presentera några sätt att beskriva räta linjer i rummet (planet) analytiskt d v s med hjälp av ekvationer.

Betrakta en rät linje L i rummet (planet).
Låt $\overline{v}$ vara en vektor som är parallell med linjen L (*en riktningsvektor*) och P_0 en punkt på linjen. Observera att för varje punkt P på L finns det en konstant t_P (och bara en) s. a. $\overline{P_0P} = t_P \cdot \overline{v}$ $(*)$. Omvänt, varje punkt P i rummet (planet), för vilken gäller likheten $(*)$ för något tal t_P, ligger på L. Så definierar villkoret $(*)$ alla punkter på L och bara dem.

Fixera en punkt O i rummet.
Punkter och ortsvektorer kan paras ihop (bl. a. P och $\overline{OP}$, P_0 och $\overline{OP_0}$). Då får man ur triangelregeln att $\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P}$ eller $\overline{OP} = \overline{OP_0} + t_P \cdot \overline{v}$ $(**)$
(linjens ekvation *på vektorform*, där t_P (eller kortare t) är *en parameter* längs linjen).

Inför ett koordinatsystem (en punkt och en bas) i rummet. Om (x, y, z) (resp. (x_0, y_0, z_0)) är koordinater för vektorn $\overline{OP}$ (resp. $\overline{OP_0}$) i basen så är (x, y, z) (resp. (x_0, y_0, z_0)) koordinater för punkten P (resp. P_0) i koordinatsystemet. Låt $\overline{v}$ har koordinater (a, b, c) i basen.
Då förvandlas linjens ekvation $(**)$ på vektorform till

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (***) \text{ (linjens ekvation } \textit{på koordinatform med parameter } t\text{)}$$

Lös ut t ur ekvationen. Vi får $(t =)$ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$
(linjens ekvation *på parameterfri form* eller *en kanonisk ekvation* för L).

Exempel 1: Bestäm ekv på koordinatform med parameter (på parameterfri form) för den räta linje L som går genom punkterna $A(1, 2, 3)$ och $B(2, 3, 4)$.

Lsg: Obs att vektorn $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, 3, 4) - (1, 2, 3) = (1, 1, 1)$ är parallell med L. Välj punkten A (B går också) som P_0 och vektorn $\overline{AB}$ som $\overline{v}$ och sätt dem i ekv $(***)$. Man får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (L's ekvation på koordinatform med parameter).

Analogt, man kan få L's ekvation på parameterfri form:
$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

I planet förvandlas linjens ekvation på parameterfri form till ekvationen
$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$. Inför $A = b, B = -a, C = ay_0 - bx_0$.
Då får man $Ax + By + C = 0$ (linjens ekv på *allmänform* eller *normalform*).
Observera att $(A, B) \neq (0, 0)$ (ty $\overline{v} = (a, b) \neq \overline{0}$).

Man kan även visa (se nästa exempel) att varje ekvation $Ax + By + C = 0$ med $(A, B) \neq (0, 0)$ beskriver en rät linje i **planet** med ett koordinatsystem.

Exempel 2: Bestäm ekv på koordinatform med parameter för linjen $3x + y - 2 = 0$.
Lsg: Obs att $y = 2 - 3x$. Inför x som parameter t längs linjen. Sammanfatta:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Obs att $\overline{v} = (1, -3)$ är en riktningsvektor för linjen och $P_0(0, 2)$ är en punkt på linjen.

Antag att vårt koordinatsystem i planet är ortonormerat (basen är en ON-bas). Då gäller

(i) vektorn $\overline{n}(A, B) \perp L$ ty $\overline{n} \cdot \overline{v} = ab + b(-a) = 0$;

(ii) varje ekv $Ax + By + C = 0$, där $(A, B) \neq (0, 0)$,
beskriver en rät linje med *en normalvektor* $\overline{n}(A, B)$ (d v s $\overline{n} \perp L$) och en riktningsvektor $\overline{v}(-B, A)$ (d v s $\overline{v} || L$).

Exempel 3: Avståndet d mellan en punkt M och linjen L i planet (rummet).
Låt $Q = \mathrm{pr}_L M$. Då är $d = |\overline{MQ}|$.

Antag att vårt koordinatsystem är ortonormerat, $L : Ax + By + C = 0$ och $M(m, n)$.
Då är $d = \frac{|Am+Bn+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Andra objekt i planet

- *En cirkel* C med radie R och centrum i punkten $A(x_0, y_0)$:

$\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$ (eller $|(x, y) - (x_0, y_0)| = R$)

- *En ellips* E med centrum i punkten $A(x_0, y_0)$ och halvaxlarna a och b:

$\{(x, y) : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\}$ (eller om $a > b$ och $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ så är

$|(x,y)-(-c+x_0,y_0)|+|(x,y)-(c+x_0,y_0)|=2a$; vad händer om $a \leq b$?)

- *En hyperbel* H med centrum i origo $O(0,0)$ och halvaxlarna a och b:

$\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\}$ (se sida 79)

- *En parabel* P med topp i origo $O(0,0)$ och fokus i punkten $F(0,a)$:

$\{(x,y) : y=\frac{1}{4a}\cdot x^2\}$ (se sida 81)

Plan i rummet

Vi ska presentera några sätt att beskriva plan i rummet med hjälp av ekvationer.

Betrakta ett plan π i rummet.
Låt $\overline{u},\overline{v}$ vara vektorer som ligger i planet π och utgör där en bas, och P_0 en punkt på π. Observera att för varje punkt P på planet finns det två konstanter t_P och s_P (entydigt bestämda) s. a. $\overline{P_0P}=t_P\cdot\overline{u}+s_P\cdot\overline{v}$ $(*)$ (t_P och s_P är koordinater av vektorn $\overline{P_0P}$ i basen $\overline{u}$, $\overline{v}$). Omvänt, varje punkt P i rummet, för vilken gäller likheten $(*)$ för några tal t_P och s_P, ligger på π. Så definierar villkoret $(*)$ alla punkter på π och bara dem.

Fixera en punkt O i rummet. Då får man att
$\overline{OP}=\overline{OP_0}+\overline{P_0P}$ eller $\overline{OP}=\overline{OP_0}+t_P\cdot\overline{u}+s_P\cdot\overline{v}$ $(**)$
(planets ekv *på vektorform*, där t_P, s_P eller kortare t, s är parametrar).

Inför ett koordinatsystem (en punkt och en bas) i rummet och
låt $P(x,y,z)$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $\overline{u}(a_1,b_1,c_1)$, $\overline{u}(a_2,b_2,c_2)$ (punkterna och vektorerna med deras koordinater).
Då förvandlas planets ekv $(**)$ på vektorform till

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $(***)$ (planets ekv *på koordinatform med parametrar t och s*).

Betrakta $\overline{n}\perp\pi$ (till ex. $\overline{n}=\overline{u}\times\overline{v}$). Då gäller $\overline{P_0P}\perp\overline{n} \iff \overline{P_0P}\cdot\overline{n}=0$.
Om koordinatsystemet är ortonormerat (basen i systemet är en ON-bas) och $\overline{n}(A,B,C)$
Då gäller

(i) $\overline{P_0P}\cdot\overline{n}=0 \iff A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Inför $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Då får vi $Ax+By+Cz+D=0$, (planets ekv *på normalform* eller *på allmänform*). Lägg märke till att $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

(ii) Varje ekv $Ax+By+Cz+D=0$, där $(A,B,C)\neq(0,0,0)$, beskriver ett plan med *en normalvektor* $\overline{n}(A,B,C)$ (d v s $\overline{n}\perp\pi$).

Observera att varje plan i rummet försett även med ett allmänt koordinatsystem kan beskrivas med någon ekvation $Ax + By + Cz + D = 0$, där $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, och varje sådan ekvation definierar ett plan i rummet.

Exempel 4: Bestäm ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$ och $C(2, 3, 4)$ (koordinatsystem är höger ortonormerat).

Lsg: Obs vektorerna $\overline{AB} = (1, 2, 3) - (0, 0, 0) = (1, 2, 3)$ och $\overline{AC} = (2, 3, 4)$ ligger i planet och icke parallella (varför?). Vektorn $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (-1, 2, -1)$ är en normalvektor till planet. Så är planets ekv $(-1)\cdot x + 2\cdot y + (-1)\cdot z + D = 0$. Sätt in en av givna punkterna (säg A) i den här ekvationen och finn $D = 0$. Vi får planets ekvation: $(-1)\cdot x + 2\cdot y + (-1)\cdot z = 0$ eller $x - 2y + z = 0$.

Exempel 5: Bestäm skärningen mellan två plan $x + 2y + z + 3 = 0$ och $x + y - z - 2 = 0$ givna i ett höger ortonormerat koordinatsystem.

Svar: en rät linje med ekv

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 6: Avståndet d mellan en punkt M och ett plan π i rummet.
Låt $Q = \mathrm{pr}_\pi M$. Då är $d = |\overline{MQ}|$.

Antag att vårt koordinatsystem är ortonormerat, $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ och $M(m, n, p)$. Då är $d = \frac{|Am+Bn+Cp+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (Visa själva!)

Andra objekt i rummet

- *En sfär* S med radie R och centrum i punkten $A(x_0, y_0, z_0)$:

  $\{(x, y, z) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$

- *En ellipsoid* E med centrum i punkten $A(x_0, y_0, z_0)$ och halvaxlarna a, b, c:

  $\{(x, y, z) : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} = 1\}$

- *En cylinder* C med radie R och z-axel som rotationsaxeln:

  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2\}$

- *En kon* K med z-axel som rotationsaxeln:

  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$

- *En sadel* S:

$\{(x, y, z) : x^2 - y^2 = z\}$

Det finns fler typer (kolla till ex. boken H. Anton, C. Rorres, Elementary Linear Algebra, J. Wiley & Sons, Inc 2 på biblioteket).