Fö 4:

September 28, 2020

Rummet R^n och dess generaliseringar

Betrakta en bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ i planet. Repetera att varje vektor $\overline{u}$ i planet kan identifieras med dess koordinater (ett ordnat par av reella tal) i basen och tvärtom. Då kan mängden av ALLA ordnade reella par tolkas som mängden av ALLA vektorer i planet. Om man vill addera två vektorer eller multiplicera en vektor med en konstant utför man motsvarande operation med koordinater för att få fram summan eller produkten. Analogt i rummet där varje vektor identifieras med en ordnad trippel av reella tal.

Generalisera !
Definition (sid. 116): Låt $n \geq 1$. Med *en n-dimensionell vektor* $\overline{v}$ menar vi en ordnad n-tipel av reella tal

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ (man får skriva } (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ istället).}$$

Motsatt vektor till $\overline{v}$ är vektorn $-\overline{v} = (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$. *Nollvektorn*: $\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Mängden av ALLA n-dimensionella vektorer utgör rummet R^n.

Definition: *Summan* av två vektorer $\overline{u}$ och $\overline{v}$ i R^n ges av

$$\overline{u} + \overline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \dots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Produkten av ett reellt tal k och en vektor $\overline{v}$ i R^n ges av

$$k \cdot \overline{v} = k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ \dots \\ k \cdot v_n \end{pmatrix}.$$

Operationer ovan är STANDARDOPERATIONER på R^n.

Sats (Egenskaper) (sid. 409):
Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara n-dimensionella vektorer och k, p reella tal. Då gäller

(1) $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$; (2) $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$;

(3) $\overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$; (4) $\overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$;

(5) $(k+p)\cdot\overline{u}=k\cdot\overline{u}+p\cdot\overline{u}$; (6) $k\cdot(\overline{u}+\overline{v})=k\cdot\overline{u}+k\cdot\overline{v}$;

(7) $k\cdot(p\cdot\overline{u})=(k\cdot p)\cdot\overline{u}$; (8)$1\cdot\overline{u}=\overline{u}$.

• *Differensen*: $\overline{u}-\overline{v}=\overline{u}+(-1)\cdot\overline{v}$.

Exampel 1. Låt $\overline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\overline{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overline{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$. Finn $\overline{d}=2\cdot\overline{a}+3\cdot\overline{b}-\overline{c}$.

Lsg. $\overline{d}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\3\\9\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\15\\6\end{pmatrix}$.

Om basen $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ i planet är en ON-bas så kan skalärprodukten $\overline{u}\cdot\overline{v}$ av två vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ utryckas på koordinatform. Samma gäller längden $|\overline{w}|$ av en vektor $\overline{w}$.

Generalisera!
Definition: *(Standard-) skalärprodukten* $\overline{u}\cdot\overline{v}$ av vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ i R^n ges av

$$\overline{u}\cdot\overline{v}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\dots\\u_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\dots\\v_n\end{pmatrix}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n.$$

Sats (Egenskaper): Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara vektorer i R^n och k ett reellt tal. Då gäller

(i) $\overline{u}\cdot\overline{v}=\overline{v}\cdot\overline{u}$;

(ii) $\overline{u}\cdot(\overline{v}+\overline{w})=\overline{u}\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot\overline{w}$;

(iii) $(k\cdot\overline{u})\cdot\overline{v}=k\cdot(\overline{u}\cdot\overline{v})$;

(iv) $\overline{u}\cdot\overline{u}\geq 0$ och $\overline{u}\cdot\overline{u}=0$ omm $\overline{u}=\overline{0}$.

Definition: Längden $|\overline{v}|$ av vektorn $\overline{v}$ i R^n ges av
$|\overline{v}|=\sqrt{\overline{v}\cdot\overline{v}}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2}$.

Exempel 2: Antag att $\overline{u}=(2,3,4,5)$ och $\overline{v}=(-1,2,0,4)$. Finn $\overline{u}\cdot(2\cdot\overline{v})$ och $|\overline{u}|$.
Lsg. Obs $2\cdot\overline{v}=2\cdot(-1,2,0,4)=(-2,4,0,8)$ och $\overline{u}\cdot(2\cdot\overline{v})=(2,3,4,5)\cdot(-2,4,0,8)=-4+12+0+40=48$. Dessutom, $|\overline{u}|=\sqrt{\overline{u}\cdot\overline{u}}=\sqrt{2^2+3^2+4^2+5^2}=\sqrt{54}$.

Exempel 3: $|k \cdot \overline{v}| = |k| \cdot |\overline{v}|$, $|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq |\overline{u}| \cdot |\overline{v}|$ och $|\overline{u} + \overline{v}| \leq |\overline{u}| + |\overline{v}|$.

Definition: Nollskilda vektorer $\overline{u}$ och $\overline{v}$ är *ortogonala* om $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$.

• *Standardbasen* i R^n: $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overline{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n$.

Egenskaper:

(i) $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ är parvis ortogonala;

(ii) $|\overline{e_i}| = 1$ för varje i;

(iii) om $\overline{v}$ är en vektor i R^n så är $\overline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot \overline{e_1} + v_2 \cdot \overline{e_2} + \dots v_n \cdot \overline{e_n}$,

konstanterna $v_1, \dots, v_n$ är $\overline{v}$'s koordinater i standardbasen $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$.

Repetera att om vi har ett koordinatsystem i planet (origo och en bas) så kan varje punkt paras ihop med sin ortsvektor, och avståndet mellan två punkter är längden av differensen mellan respektiva ortsvektorer.

• *Punkter* i R^n: En ordnad n-tipel $\overline{v}$ i R^n kan också tolkas som *en punkt*,

• *Avståndet $d(\overline{u}, \overline{v})$ mellan två punkter $\overline{u}$ och $\overline{v}$* i R^n är $|\overline{u} - \overline{v}|$.

Obs att man kan införa räta linjer och plan i R^n som i R^2 och R^3

Allmänna vektorrum.

Definition (sid. 410): Låt V vara en mängd med två operationer kallade *addition* och *multiplikation med reella tal*:

- $\overline{u}, \overline{v} \in V \to \overline{u} \oplus \overline{v} \in V$ ($\overline{u} \oplus \overline{v}$ är summan av $\overline{u}, \overline{v}$);
- $\overline{u} \in V$, k är ett tal $\to k \odot \overline{u} \in V$ ($k \odot \overline{u}$ är produkten av $k, \overline{u}$).

Mängden V är *ett vektorrum* om följande villkor är uppfyllda:

(1) $\overline{u} \oplus \overline{v} = \overline{v} \oplus \overline{u}$;

(2) $\overline{u} \oplus (\overline{v} \oplus \overline{w}) = (\overline{u} \oplus \overline{v}) \oplus \overline{w}$;

(3) det finns ett element $\overline{0} \in V$ (*nollvektorn*) s. a. $\overline{u} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{u} = \overline{u}$;

(4) för varja element $\overline{u} \in V$ finns det ett element $-\overline{u} \in V$ (*motsatt element*) s. a. $\overline{u} \oplus (-\overline{u}) = (-\overline{u}) \oplus \overline{u} = \overline{0}$;

(5) $(k+p) \odot \overline{u} = k \odot \overline{u} \oplus p \odot \overline{u}$;

(6) $k \odot (\overline{u} \oplus \overline{v}) = k \odot \overline{u} \oplus k \odot \overline{v}$;

(7) $k \odot (p \odot \overline{u}) = (k \cdot p) \odot \overline{u}$;

(8) $1 \odot \overline{u} = \overline{u}$, där $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$ och k, p är tal.

Element av V kallas *vektorer.*

Om det inte leder till någon motsägelse använder vi " + " och " $\cdot$ " istället för $\oplus$ och $\odot$.

Exempel 4:

(i) Mängden av vektorer i planet (resp. rummet) med standardoperationer är ett vektorrum.

(ii) Rummet R^n med standardoperationer är ett vektorrum.

(iii) Alla reellvärda funktioner definierade på R med operationer:

- (f + g)(x) = f(x)+g(x),
- $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, för varje $x \in R$,

är ett vektorrum.

(v) Mängden av alla reella tal med standardoperationer " + " och " $\cdot$ " är ett vektorrum.

Exempel 5 Antag att V är samma mängd som R^2 men att operationerna definieras av

- $\overline{u} = (u_1, u_2), \overline{v} = (v_1, v_2) \to \overline{u} \oplus \overline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$;
- $k, \overline{u} = (u_1, u_2) \to k \odot \overline{u} = (k \cdot u_1, 0)$.

Då är V inte något vektorrum.

Underrum.

Definition (sid. 413): Låt V vara *ett vektorrum.* En delmängd W till V är *ett underrum till* V om W är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med reella tal som gäller i V.

Exempel 6: Delmängderna $\{\overline{0}\}, V$ till V är enkla exempel på underrum till V.

Sats (Kriterium): En icke-tom delmängd W till vektorrummet V är ett underrum till V då och endast då följande gäller:

(i) om $\overline{u}, \overline{v} \in W$ så är $\overline{u} + \overline{v} \in W$;

(ii) om $\overline{u} \in W$ och k är ett reellt tal så är $k \cdot \overline{u} \in W$.

Exempel 7: Låt $V = R^4$ med standardoperationer. Då är

$W_1 = \{\overline{x} \in R^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}$ ett underrum till V men

$W_2 = \{\overline{x} \in R^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1\}$ inget underrum till V.

Exempel 8: Låt V vara ett vektorrum och $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k \in V$.

ALLA möjliga linjära kombinationer (*linjära höljet*) av $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k =$

$\{p_1 \cdot \overline{u}_1 + p_2 \cdot \overline{u}_2 + \ldots + p_k \cdot \overline{u}_k : p_1, p_2, \ldots, p_k$ är konstanter $\}$

utgör ett underrum till V.

- *Samtliga underrum till* R^2 är $\{\overline{0}\}, R^2$ och alla räta linjer som går genom origo.

- *Samtliga underrum till* R^3 är $\{\overline{0}\}, R^3$, alla räta linjer och plan som går genom origo.

Euklidiska rum.

Definition (sid. 420): *En skalärprodukt* på ett vektorrum V är en funktion som till varje par av vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ ordnar ett tal betecknat $\overline{u} \odot \overline{v}$ med följande egenskaper:

(i) $\overline{u} \odot \overline{v} = \overline{v} \odot \overline{u}$;

(ii) $\overline{u} \odot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \odot \overline{v} + \overline{u} \odot \overline{w}$;

(iii) $(k \cdot \overline{u}) \odot \overline{v} = k \cdot (\overline{u} \odot \overline{v})$;

(iv) $\overline{u} \odot \overline{u} \geq 0$ för alla $\overline{u}$ och $\overline{u} \odot \overline{u} = 0$ omm $\overline{u} = \overline{0}$.

Ett vektorrum försett med en skalärprodukt kallas *euklidiskt*.

Om det inte leder till någon motsägelse använder vi " $\cdot$ " istället för $\odot$.

- Om $\overline{u} \cdot \overline{v}$ är en skalärprodukt på ett vektorrum V och $a > 0$ så är även funktionen $(\overline{u} \odot \overline{v}) = a \cdot (\overline{u} \cdot \overline{v})$ en skalärprodukt på samma vektorrum.

Exempel 9: Funktionen $(\overline{u} \cdot \overline{v})_1 = 2u_1 \cdot v_1 + 3u_2 \cdot v_2$ på R^2 är en skalärprodukt på R^2 däremot är funktionen $(\overline{u} \cdot \overline{v})_2 = 2u_1 \cdot v_1 + 3u_2 \cdot v_1$ inte någon skalärprodukt på R^2.

- Man kan införa *längden* av en vektor som tidigare: $|\overline{u}| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$.

Olikheterna $|k \cdot \overline{v}| = |k| \cdot |\overline{v}|$, $|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq |\overline{u}| \cdot |\overline{v}|$ och $|\overline{u} + \overline{v}| \leq |\overline{u}| + |\overline{v}|$ gäller också.