Fö 5:

July 7, 2020

Matriser

Definition (sid. 125): *En matris* av typ $m \times n$ är ett rektangulär schema av tal med m *rader* och n kolonner,

till ex. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Elementet $a_{\mathbf{ij}}$ står i rad **i** och i kolonn **j** (*positionens koordinater*).

- *Beteckningar*: A, B, C o s v eller $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$, $(a_{ij})_{m\times n}$.

  En matris av typ $1 \times n$ är *en radmatris.*

  En matris av typ $m \times 1$ är *en kolonnmatris.*

  En matris bestående av nollor är *en nollmatris.*
  (Det finns många nollmatriser.)

- *Kvadratiska matriser*: $(a_{ij})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$.

  Element $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bildar *huvuddiagonalen* hos matrisen.

  Element $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ bildar *bidiagonalen.*

  Matrisen $(a_{ij})_{n\times n}$ är *en diagonalmatris* om $a_{ij} = 0$ för alla $i \neq j$

  Matrisen $(a_{ij})_{n\times n}$ är *en enhetsmatris* om den är en diagonalmatris och
  $a_{ii} = 1$ för alla i.

  Matrisen $(a_{ij})_{n\times n}$ är *övertriangulär (undertriangulär)* om
  $a_{ij} = 0$ för alla $i > j$ $(i < j)$.

  Matrisen $(a_{ij})_{n\times n}$ är *en symmetrisk* matris om
  $a_{ij} = a_{ji}$ för alla i, j.

Exempel 1: Vilka av följande matriser är diagonalmatriser, enhetsmatriser, övertriangulära matriser, symmetriska matriser? $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Svar: A_2, A_3 är diagonalmatriser, A_3 är en enhetsmatris, A_2, A_3, A_4 är övertriangulära matriser, A_2, A_3, A_6 är symmetriska matriser.

Operationer på matriser

• *Addition* (sid. 129): Låt $A = (a_{ij})_{m\times n}$ och $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (Obs A, B är av samma typ!).

Summan $A + B$ är matrisen $C = (c_{ij})_{m\times n}$, där $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ för alla tillåtna par i, j.

Exempel 2: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

• *Multiplikation av en matris med ett tal*: Låt $A = (a_{ij})_{m\times n}$ och k är en konstant.

Produkten $k \cdot A$ är matrisen $D = (d_{ij})_{m\times n}$, där $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$ för alla tillåtna par i, j.

Obs en beteckning: $-A = (-1) \cdot A$.

Exempel 3: $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$

• *Subtraktion*: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Sats (Egenskaper): Låt A, B, C vara matriser av samma typ och k, p reella tal.
Då gäller

(1) $A + B = B + A$;

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(3) $A + O = A$, där O är nollmatrisen av samma typ som A;

(4) $A + (-A) = O$;

(5) $(k + p) \cdot A = k \cdot A + p \cdot A$;

(6) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$;

(7) $k \cdot (p \cdot A) = (k \cdot p) \cdot A$;

(8) $1 \cdot A = A$.

Följd: Mängden av alla matriser av typ $m \times n$ (m, n är fixerade) med operationerna: addition och multiplikation med ett tal, är ett vektorrum.

• *Multiplikation av två matriser* (sida 133): Låt $A = (a_{ij})_{m\times n}$ och $B = (b_{ij})_{n\times k}$ (Obs typerna ($m \times \mathbf{n}$), ($\mathbf{n} \times k$) och ordning!).

Produkten $A \cdot B$ är matrisen $C = (c_{ij})_{\mathbf{m}\times\mathbf{k}}$, där $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$ för alla tillåtna par i, j

(Obs att högerledet i likheten kan tolkas som standardskalärprodukten $\overline{r}_i \cdot \overline{k}_j$ av vektorerna $\overline{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (rad i av matrisen A) och $\overline{k}_j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ (kolonn j av matrisen B) i vektorrummet R^n d v s $c_{ij} = \overline{r}_i \cdot \overline{k}_j$.

Exempel 4: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$ (Kolla typerna: $(2 \times \mathbf{3}) \cdot (\mathbf{3} \times 3) = (2 \times 3)$) $=$

$$\begin{pmatrix} (2\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 4\cdot 2) & (2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 7) & (2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 0) \\ (5\cdot 1 + 6\cdot(-1) + 7\cdot 2) & (5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 7) & (5\cdot 1 + 6\cdot 3 + 7\cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 51 & 11 \\ 13 & 99 & 23 \end{pmatrix}.$$

• *Transponering*: Låt $A = (a_{ij})_{m\times n}$. *Den transponerade matrisen* A^T är matrisen $C = (c_{ij})_{n\times m}$, där $c_{ij} = a_{ji}$ för alla tillåtna par i, j (rader av A har blivit kolonner av C i samma ordning).

Exempel 5: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Obs att $(A^T)^T = A$.

Sats (Egenskaper): Låt A, B, C vara matriser av passande typer och k ett reellt tal.
Då gäller:

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

(2) $(k \cdot A) \cdot B = k \cdot (A \cdot B)$;

(3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

(4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

(5) $A \cdot E = E \cdot A = A$, där E är en enhetsmatris av passande typ;

(6) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(7) $(k \cdot A)^T = k \cdot (A^T)$;

(8) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Obs att allmänt $A \cdot B \neq B \cdot A$ till skillnad från reella tal, där $a \cdot b = b \cdot a$.

Exempel 6: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ytterligare en skillnad mellan matriser och tal. Ekvationen $x^2 = 1$ har två rötter 1 och -1.

Exempel 7: Ekvationen $X^2 = E$, där $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ har lika många rötter som punkter på tallinjen.

• *Ekvationssystem på matrisform*:

$$(*) \quad \left(\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = \ \ b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = \ \ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right)$$

Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ och $\overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Då är $(*)$ på matrisform: $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$.

Radrum, kolonnrum och nollrum till en matris

Låt $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Då finns det m rader:

$\overline{r}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \overline{r}_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ (element i R^n) och
n kolonner: $\overline{k}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \overline{k}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ (element i R^m).

• *Radrummet till* A är mängden av samtliga linjära kombinationär av $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_m$.
Obs att detta är ett underrum till R^n.

• *Kolonnrummet till* A är mängden av samtliga linjära kombinationär av $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n$.
Obs att detta är ett underrum till R^m.

• *Nollrummet till* A är samtliga vektorer $\overline{X}$ s. a. $A \cdot \overline{X} = \overline{0}$.
Obs att detta är ett underrum till R^n.

Lägg märke till att varje vektor från radrummet till A är vinkelrätt mot godtycklig vektor från nollrummet till A, d v s radrummet till $A \perp$ nollrummet till A.

Analogt, kolonnrummet till $A \perp$ nollrummet till A^T.

Om $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$ som ovan så är $\overline{B} = x_1 \cdot \overline{k}_1 + \ldots + x_n \overline{k}_n$ d v s $\overline{B}$ är ett element av kolonnrummet till A.