Fö 6:

October 7, 2023

Linjära avbildningar

Definition (sid. 140): *En avbildning (transformation, funktion)* $f : X \to Y$ är en regel som till varje element $x \in X$ ordnar ett element $y = f(x) \in Y$ (*bilden* av x).

- X är *definitionsmängden* av f.
- $f(X) = \{z \in Y :$ det finns $v \in X$ s. a. $f(v) = z\}$ är *värdemängden* av f.

Exempel 1: a) $y_1 = x_1^2 + x_2^2$; b) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_3 \end{cases}$

är avbildningar s. a. a) : $R^2_{\overline{x}} \to R_{\overline{y}}$, b) : $R^2_{\overline{x}} \to R^2_{\overline{y}}$ och c) : $R^3_{\overline{x}} \to R^2_{\overline{y}}$.

Definition (sid. 142): En avbildning $f : R^n \to R^m$ mellan vektorrum R^n och R^m säges vara *linjär* om
$(*)$ $f(\overline{x}) = A \cdot \overline{x}$ för varje vektor $\overline{x} \in R^n$, där A är en $(m \times n)$-matris (*avbildningsmatrisen*) och $\overline{x}$ presenterad i HL av (*) som en kolonnmatris.

Obs att $(*)$ kan skrivas i formen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ eller

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \end{cases} \quad \text{och även} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

- $f(\overline{0}) = A \cdot \overline{0} = \overline{0}$;
- $f(\overline{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j} \cdot \overline{e}'_1 + \ldots a_m \cdot \overline{e}'_m,\ j \le n$, där $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \overline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

  är standardbasen i R^n och $\overline{e}'_1, \ldots \overline{e}'_m$ är standardbasen i R^m.

• värdemängden till f är kolonnrummet till A;

I exemplet ovan är a) och b) icke-linjära; c) är linjär med avbildningsmatrisen
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exempel 2: *Likformig expansion med faktor $k > 1$ i R^2 är en linjär avbildning i R^2 med* avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Funktionen avbildar varje vektor $\overline{x} \in R^2$ på vektor $k \cdot \overline{x} \in R^2$.

Projektioner, speglingar och vridningar

Betrakta ett ON-koordinatsystem i planet: origo O och en ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}$. Punkter i planet och motsvarande ortsvektorer (och även vektorer i planet) kan identifieras. Förse varje punkt P med dess koordinater i systemet: $P(x_1, x_2)$ (repetera att $\overline{OP} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}$). Så varje avbildning f som till varje vektor $\overline{OP}$ (punkt $P(x_1, x_2)$) i planet ordnar en viss vektor $\overline{OQ}$ (punkt $Q(y_1, y_2)$) i samma plan kan beskrivas på koordinatform: $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$, och denna kan tolkas som en avbildning från R^2 till R^2. Analogt i rummet.

• *(Ortogonal) projektion på en linje L i planet:* varje punkt P i planet avbildas på den punkt $Q \in L$ som ligger närmast P ($Q = pr_L P$, se Fö 1).

• *(Ortogonal) projektion på ett plan π i rummet:* varje punkt P i rummet avbildas på den punkt $Q \in \pi$ som ligger närmast P ($Q = pr_\pi P$).

Exempel 3: Visa att projektionen på linjen $L : 2z_1 - z_2 = 0$ är linjär och bestäm dess matris.

Låt $P(x_1, x_2)$ och $Q(y_1, y_2)$. Då är $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{5} \cdot x_1 + \frac{2}{5} \cdot x_2 \\ y_2 = \frac{2}{5} \cdot x_1 + \frac{4}{5} \cdot x_2 \end{cases}$ och $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Rita en bild: linjen L, punkterna P och Q.

Notera att vektorn $\overline{n} = (2, -1)$ är en normalvektor till L, vektorn $\overline{v} = (1, 2)$ är en riktningsvektor till L och $O(0, 0) \in L$.

Lägg märke till att $\overline{OQ} = pr_L\overline{OP} = pr_{\overline{v}}\overline{OP} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \cdot \overline{v} = (\frac{x_1+2x_2}{5}) \cdot (1, 2) = (\frac{x_1+2x_2}{5}, \frac{2x_1+4x_2}{5})$.

Sammanfatta: $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{5} \cdot x_1 + \frac{2}{5} \cdot x_2 \\ y_2 = \frac{2}{5} \cdot x_1 + \frac{4}{5} \cdot x_2 \end{cases}$.

Nu plockar vi fram (koefficienterna hos x'or) matrisen $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Svara på frågan: *Finns det ett annat sätt för att bestämma Q?*

Bestäm koordinaterna för projektionen N av punkten $M(3,4)$ på linjen L ($\overline{ON} = pr_L\overline{OM}$): så är $N(\frac{3+2\cdot 4}{5}, \frac{2\cdot 3+4\cdot 4}{5})$ eller $N(\frac{11}{5}, \frac{22}{5})$.

• *Spegling i en linje L i planet:* varje punkt P i planet avbildas på den punkt Q i planet som har samma avstånd till linjen L som P och som är sådan att vektor $\overline{PQ}$ är vinkelrätt mot L.

• *Spegling i ett plan π i rummet:* varje punkt P i rummet avbildas på den punkt Q i rummet som har samma avstånd till planet π som P och som är sådan att vektor $\overline{PQ}$ är vinkelrätt mot π.

Exempel 4: Visa att speglingen i planet $\pi : 2z_1 + 2z_2 + z_3 = 0$ är linjär och bestäm dess matris.

Låt $P(x_1, x_2, x_3)$ och $Q(y_1, y_2, y_3)$. Då är $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{9}(x_1 - 8x_2 - 4x_3) \\ y_2 = \frac{1}{9}(-8x_1 + x_2 - 4x_3) \\ y_3 = \frac{1}{9}(-4x_1 - 4x_2 + 7x_3) \end{cases}$ och

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rita en bild: planet π, punkterna P och Q. Notera att vektorn $\overline{n} = (2,2,1)$ är en normal till planet och $O(0,0,0) \in \pi$.

Lägg märke till att $\overline{OQ} = \overline{OP} - 2pr_{\overline{n}}\overline{OP} = \overline{OP} - 2\frac{\overline{OP}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\cdot\overline{n} =$ $(\mathrm{x}_1, x_2, x_3) - 2(\frac{2x_1+2x_2+x_3}{9})\cdot(2,2,1) = (\frac{x_1-8x_2-4x_3}{9}, \frac{-8x_1+x_2-4x_3}{9}, \frac{-4x_1-4x_2+7x_3}{9})$.

Sammanfatta: $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{9}(x_1 - 8x_2 - 4x_3) \\ y_2 = \frac{1}{9}(-8x_1 + x_2 - 4x_3) \\ y_3 = \frac{1}{9}(-4x_1 - 4x_2 + 7x_3) \end{cases}$

Nu plockar vi fram (kolla koefficienterna hos x'or) matrisen A.

Svara på frågan: *Finns det ett annat sätt att bestämma Q?*

Bestäm koordinaterna för speglingen N av punkten $M(1,2,3)$ i planet π: $N(\frac{1-8\cdot 2-4\cdot 3}{9}, \frac{-8+2-4\cdot 3}{9}, \frac{-4-4\cdot 2+7\cdot 3}{9})$ eller $B(-3,-2,1)$.

• *Vridning av planet vinkeln θ kring en fix punkt O:* varje punkt P avbildas på den punkt Q som är spetsen av vektorn $\overline{OQ}$ i vilken vektorn $\overline{OP}$ övergår med vridningen vinkeln θ i punkten O.

Exempel 5: Vridning f av planet vinkeln θ kring origo är en linjär avbildning. Bestäm dess avbildningsmatris och bilden Q av punkten $P(1,2)$.

Lsg. Rita en bild: ett ON-koordinatsystem med origo, axlarna och basvektorerna $\overline{e_1} = (1,0)$ och $\overline{e_2} = (0,1)$. Repetera att $A = (f((1,0))|f((0,1)))$.

Notera att $f((1,0)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ och $f((0,1)) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Bilda matrisen $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ och $Q = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 2\sin(\theta) \\ \sin(\theta) + 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Obs att de betraktade ovan linjära avbildningarna är avbildningar mellan vektorrum. Men är det dock enklare att definiera dem (som vi gjort) som punktavbildningar.

• Några andra exempel:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (projektioner på axlarna i planet);

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (speglingar i axlarna i planet)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(rotation kring x-axeln vinkeln θ sett från spetsen av x-axeln i rummmet)

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(rotation kring y-axeln vinkeln θ sett från spetsen av y-axeln i rummet)

Egenskaper hos linjära avbildningar

• Algebraiska (grundläggande):

Sats (sid. 151): Låt $f : R^n \to R^m$ är linjär, $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in R^n$ och $k \in R$. Då gäller

(i) $f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2)$;

(ii) $f(k \cdot \overline{x}) = k \cdot f(\overline{x})$.

• Geometriska (några):

Varje rät linje avbildas på en rät linje eller på en punkt.

Två parallella räta linjer avbildas på parallella räta linjer eller på varsin punkt.

Sammansatta (linjära) avbildningar

Låt $f : R^n \to R^m$, $g : R^m \to R^p$ vara avbildningar. Avbildningen $h : R^n \to R^p$ definierad av $h(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$ för alla $\overline{x} \in R^n$ säges vara *sammansättningen* av f och g.

Sats Anta att f, g är linjära, A avbildningsmatrisen för f och B avbildningsmatrisen för g. Då är h också linjär och produkten $B \cdot A$ avbildningsmatrisen för h.

Exempel 6: Finn avbildningsmatrisen av den avbildning i planet som är sammansättningen av projektionen på x_2-axeln följd av speglingen i x_1-axeln.

Lsg. Projektionen ges av matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och speglingen av matrisen $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Då är avbildningsmatrisen för vår avbildning $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Allmänt om linära avbildningar

Definition: Låt V, W vara allmänna vektorrum. An avbildning $f : V \to W$ är *linjär* om

(i) $f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2)$;

(ii) $f(k \cdot \overline{x}) = k \cdot f(\overline{x})$ för alla $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V$ och $k \in R$.

• Några fakta

(i) $f(\overline{0}) = \overline{0}$;

(ii) värdemängden $f(V)$ är ett underrum till W;

(iii) mängden $f^{-1}(\overline{0})$ (= samtliga element i V som avbildas på $\overline{0} \in W$) är ett underrum till V.