Fö 7:

October 30, 2023

Linjära ekvationssystem

Inledande exempel: Finn ekv för den linje L som går genom punkterna $P(a_1, b_1)$ och $Q(a_2, b_2)$, där $a_1 \neq a_2$.

Lsg: Linjen L kan beskrivas av ekv $y = k \cdot x + m$, där k, m är obekanta.

$P, Q \in L \Rightarrow$ två villkor på k, m : $\begin{cases} b_1 = k \cdot a_1 + m \\ b_2 = k \cdot a_2 + m \end{cases}$
(*ett linjärt ekvationssystem* med två ekvationer och två obekanta k, m).

Svar: $k = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ och $m = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}$.

Definition (s. 185) Ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer och n obekanta är

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Repetera att (*) kan skrivas på matrisform: $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$,

där $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ är *ekvationssystemmatrisen*,

$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ *obekanta* och $\overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ *högerledsvektorn.*

Om $\overline{B} = \overline{0}$ så kallas systemet *homogent* annars *inhomogent.*

- Vektorn $\overline{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$ är *en lösning till (*)* om $A \cdot \overline{C} = \overline{B}$.

• *Lösningsmängden till (*)* består av samtliga lösningar till (*).

• Två ekvationssystem säges vara *ekvivalenta* om de har samma lösningsmängd.

Exempel 1 (tre typer av lösningsmängder):

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + 3x_3 = -1 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_3 = 1,\ x_2 = -4,\ x_1 = 7$$

(*en enda lsg*, 1:a typen).

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_3 = t, t \in R,\ x_2 = -3t - 1,\ x_1 = 5t + 2$$

(*oändligt många lsgar*, 2:a typen) (i fallet, *en-parameter lsg*).

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + 3x_3 = -1 \\ \qquad\;\; 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \emptyset$$

(lösningsmängden är tom, 3:e typen).

Obs att varje system ovan är på *trappform* då varje ekv har färre obekanta än föregående ekv har. Man kan få fram lsgsmängden m h a *bakåtsubstitution.*

• *Hur hittar man alla lösningar till ett linjärt system ?*

Gausselimination (eller succesiv elimination) av linjära system

Kort beskrivning: ett linjärt system transformeras m h a vissa operationer (*elementära radoperationer*) till ett annat, *ekvivalent*, linjärt system på trappform; det sista kan sedan lösas m h a bakåtsubstitutionen.

Detaljerad beskrivning (s. 188):

• *Elementära radoperationer*:

1. Byte av två ekvationer i systemet.

2. Multiplikation av en ekvation med ett tal $\neq 0$.

3. Addition av en ekvation multiplicerad med en konstant till en annan ekvation.

Obs att elementära radoperationerna ändrar ej lsgsmängden (s. 188).

Exempel 2: Lös följande system m h a Gausselimination

$$\begin{cases} 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ (byta ekv) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \ (1) & | \times (-2) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \ (2) & | \hookleftarrow (+) \\ 4x_2 - x_3 = 1 \ (3) & | \end{cases} \Leftrightarrow$$

(multiplicera ekv (1) med (-2) och lägg till ekv (2))

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & | \\ -x_2 - x_3 = -1 & | \times (-1) \\ 4x_2 - x_3 = 1 & | \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & | \\ x_2 + x_3 = 1 & | \times (-4) \\ 4x_2 - x_3 = 1 & | \hookleftarrow (+) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & | \\ x_2 + x_3 = 1 & | \\ -5x_3 = -3 & | \times (-\frac{1}{5}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Bakåtsubstitutionen ger: $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_1 = -\frac{7}{5}$. Obs att lsgsmängden består av bara en lsg.

• *Kan man inte förenkla ovanstående?* Jo.

Gausselimination på matrisform:

Börja med ekvationssystemmatrisen + högerledsvektorn = utökad matris, fortsätt sedan med samma elementära radoperationer på matriser (!) och få fram *en trappformad matris* med *ledande ettor*, skriv sedan ner motsvarande ekvationssystem och lös sista med bakåtsubstitution.

Exempel 2 (forts)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & |1 \\ 1 & 2 & 1 & |0 \\ 2 & 3 & 1 & |-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & |0 \\ 2 & 3 & 1 & |-1 \\ 0 & 4 & -1 & |1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \\ \hookleftarrow (+) \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & |0 \\ 0 & -1 & -1 & |-1 \\ 0 & 4 & -1 & |1 \end{pmatrix} \times(-1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & |0 \\ 0 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 4 & -1 & |1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times(-4) \\ \hookleftarrow (+) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & |0 \\ 0 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & -5 & |-3 \end{pmatrix} \times(-\tfrac{1}{5}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & |0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & |1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & |\frac{3}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \text{(ekvationssystem på matrisform).}$$

Vidare som ovan.

Allmänt om succesiv elimination:

• *Inhomogena system:* succesiv elimination + eventuell omnumrering av obekanta + förkastning av rader bestående av nollor $\Rightarrow$

$$(1)\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot \end{array}\right) \Leftrightarrow \text{ en enda lsg.}$$

$$(2)\quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \cdot \end{array}\right) \\ \uparrow \\ k \text{ kolonner efter sista etta} \end{array} \Leftrightarrow \textit{ k-parameter lsg, obekanta ”efter” sista ledande etta väljs som parametrar.}$$

Exempel 3. Lös ekvssystem: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$.

Lsg: Utökade matrisen + succesiv elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}.$$

Obs 3 kolonner efter sista etta. Motsvarande variabler x_2, x_3, x_4 välj som parametrar och lös ut x_1 ur sista ekvationen.

Svar: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t - 2p + \frac{1}{2}s,\ x_2 = t,\ x_3 = p,\ x_4 = s,\ t, p, s \in R$ (3-parameter lsg).

$$(3)\quad \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \text{ inga lsgar alls.}$$

• *Homogena system:* succesiv elimination + eventuell omnumrering av obekanta + förkastning av rader bestående av nollor $\Rightarrow$

$$(1)\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \text{ en enda lsg som är } \textit{trivial}\text{: } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

$$(2)\quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \dots & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{array}\right) \\ \uparrow \\ k \text{ kolonner efter sista etta} \end{array} \Leftrightarrow \textit{ k-parameter lsg, obekanta ”efter” sista ledande etta väljs som parametrar.}$$

Obs att om $n > m$ så har vi alltid oändligt många lsgar.

Exempel 4: För vilka λ har följande system oändligt många lsgar

$$\begin{cases} \lambda \cdot x + 2 \cdot y = -1 \\ 2 \cdot x + \lambda \cdot y = 1 \end{cases} ? \qquad \text{Svar: } \lambda = -2.$$

Överbestämda ekvssystem och minstakvadtatmetod

Definition (s. 204) *Ett överbestämt ekvssystem* är ett ekvssystem som saknar lsgar.

Exempel 5: Betrakta tre punkter $P(2,1)$, $Q(-3,-2)$ och $R(-1,1)$ i planet.
Finns det en rät linje $y = k \cdot x + b$ som går genom punkterna?

Lsg. Ställ upp systemet

$$\begin{cases} 2 \cdot k + b = 1 \\ -3 \cdot k + b = -2 \\ -k + b = 1 \end{cases} \qquad \text{Obs att systemet saknar lsgar. Svar är Nej.}$$

Fråga. *Kan man föreslå en rät linje som ligger närmast i någon mening (?) till de tre punkterna än alla andra linjer i planet gör?*

• *Allmänt:* Låt A vara en $(m \times n)$-matris och ekvssystem $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$ sakna lsningar d v s $A \cdot \overline{X} \neq \overline{B}$ för alla $\overline{X} \in R^n$. Kan man föreslå en vektor $\overline{X} \in R^n$ som en "lösning till sistemet" i någon rimlig mening?

Obs att vektorn $\overline{Y} = A \cdot \overline{X} - \overline{B} \neq \overline{0}$ och $\overline{Y} \in R^m$ för varje $\overline{X} \in R^n$. Det går att visa att bland sådana $\overline{Y}$-or alltid finns det en vektor med *minsta längd* (= närmast till $\overline{0}$).

Minsta-kvadratproblem: För vilken vektor $\overline{X}$ har vektorn $\overline{Y} = A \cdot \overline{X} - \overline{B}$ minsta längden i R^m? Vad är detta värde?

En sådan $\overline{X}$ kallas *minstakvadrat lsg* till ekvssystemet $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$.

Sats (sid. 207): Lösningen till $(A^t \cdot A) \cdot \overline{X} = A^t \overline{B}$ (*normalekvationerna) är minstakvadrat lsgen till ekvssystem* $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$.

Exempel 5 (forts)*:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -21 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^t \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normalekvationerna:

$$\begin{cases} 14 \cdot k - 2 \cdot b = 7 \\ -2 \cdot k + 3 \cdot b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \; k = \tfrac{21}{38}, \; b = \tfrac{7}{19}. \; \textit{Linjen } y = \tfrac{21}{38} \cdot x + \tfrac{7}{19} \textit{ är närmast till punkterna}$$

P, Q, R i minstakvadrat mening.

- *Geometri:*

Rita en bild och obs att $|A \cdot \overline{X} - \overline{B}|^2 = \sum_{i=1}^{3} (k \cdot x_1 + b - y_i)^2 \Rightarrow$ *vad ordet "närmast" betyder.*