Fö 8:

July 11, 2020

Determinanter

Betrakta mängden $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 2$.

Definition *En permutation* av M_n är en omordning av M_n.

Exempel 1: (2 1) är en permutation av M_2, (3 1 2) är en permutation av M_3.

Samtliga permutationer av M_2: (**1** 2), (2 **1**). Obs $2 = 2 \cdot 1 = 2!$ st.

Samtliga permutationer av M_3: (**1** 2 3), (**1** 3 2), (2 **1** 3), (3 **1** 2), (2 3 **1**), (3 2 **1**).
Obs $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ st.

• Totala antalet permutationer av M_n är $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Låt $P = (j_1\ j_2\ \ldots\ \mathbf{j_k}\ \ldots\ \mathbf{j_l}\ \ldots\ j_n)$ vara en permutation av M_n.

Definition: Paret $(j_k\ j_l)$ är *en inversion* i P om $j_k > j_l$.

Exempel 2: I permutationen $P_1 = (3\ 1\ 2)$ har man två inversioner: (3 1) och (3 2)
I permutationen $P_2 = (1\ 3\ 2)$ har man en inversion: (3 2).
Däremot i permutationen $P_3 = (1\ 2\ 3)$ finns det inga (noll) inversioner.

Definition: En permutation P är *jämn* (*udda*) om antalet inversioner i P är ett jämnt (udda) heltal.

Exempel 3: Permutationerna (3 1 2) och (1 2 3) är jämna och permutationen (1 3 2) är udda.

Definition (s. 245): Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, n \geq 1$ (en kvadratisk matris).

Determinanten av A, **det A**, definieras av

(i) $\det A = a$ om $A = (a)$ (en $(1 \times 1) - matris$);

(ii) $\det A = \sum(\pm)\, a_{1j_1} \cdot\ a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot\ a_{nj_n},$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & (j_1\ j_2\ \dots\ j_n) & & \end{array}$$

där summan går över samtliga permutationer $(j_1\ j_2\ \dots\ j_n)$ av M_n och tecken $(\pm)$ framför produkten $a_{1j_1} \cdot\ a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot\ a_{nj_n}$ blir $(+)$ om permutationen $(j_1\ j_2\ \dots\ j_n)$ är jämn och $(-)$ annars, $n \geq 2$.

• Obs att varje rad och varje kolonn av matrisen A presenteras i produkten $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ av exakt en faktor.

Exempel 4:

(a) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$

$$\begin{array}{cc} \uparrow\ \ \uparrow & \uparrow\ \ \uparrow \\ (1\ 2) & (2\ 1) \\ \text{jämn} & \text{udda} \end{array}$$

(b) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{\mathbf{11}} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{\mathbf{11}} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{\mathbf{12}} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow & \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow & \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ (1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) & (2\ 1\ 3) \\ \text{jämn} & \text{udda} & \text{udda} \end{array}$$

$+a_{\mathbf{12}} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{\mathbf{13}} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{\mathbf{13}} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow & \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow & \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ (2\ 3\ 1) & (3\ 1\ 2) & (3\ 1\ 1) \\ \text{jämn} & \text{jämn} & \text{udda} \end{array}$$

• *Sarrus regel*, ett sätt till att räkna determinanter (bara för (3×3)-matriser !) :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array} =$$

(produkter längs diagonalerna med motsvarande tecken)

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$.

• *Vektorprodukt av två vektorer m h a determinanter*:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (\det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \ -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) \text{ eller}$$

$$\det \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \overline{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \overline{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{e}_3.$$

Exempel 5: Finn arean av triangeln med hörn i punkterna $A(-1, 2), B(3, 3), C(2, -1)$.

Lsg: Sätt $\overline{AB} = (4, 1, 0)$ och $\overline{AC} = (3, -3, 0)$.

Då är arean $= \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \cdot |\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}| = \frac{15}{2}$

Exempel 6: Finn $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pm)\ (-3) \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot (2) \cdot (5) = -120$

Obs att det finns bara ett element i summan som $\neq 0$.
Detta svarar mot permutationen $P = (5\ 4\ 3\ 2\ 1)$.

Inversioner i P: $(5\ 4), (5\ 3), (5\ 2), (5\ 1), (4\ 3), (4\ 2), (4\ 1), (3\ 2), (3\ 1), (2\ 1)$ (10 st.)
$\Rightarrow (\pm)$ blir $(+)$.

• *Speciella fall* (forts med beräkningsmetoder):

(1) det(en triangulär $(n \times n)$-matris $A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$;

till ex. $\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-8) = -32$.

(2) det(en matris som innehåller en rad eller en kolonn bestående av nollor) $= 0$;

till ex. $\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = 0.$

Egenskaper hos determinanter

Låt $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \det(\overline{a}, \overline{b})$ (s. 236). Då gäller

(1) $\det(\lambda \cdot \overline{a}, \overline{b}) = \lambda \cdot \det(\overline{a}, \overline{b})$ och $\det(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = \det(\overline{a}, \overline{c}) + \det(\overline{b}, \overline{c})$,

(2) $\det(\overline{a}, \overline{a}) = 0$, (3) $\det(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = 1$.

Obs (1) $\Rightarrow$ determinanten är en linjär funktion av 1:a kolonnen.
Samma gäller 2:a kolonnen (och raderna !) och även det allmänna fallet $n \times n$.

• *Alternativ definition av determinanter* (s. 244):

Determinanten är en funktion som till varje kvadratisk matris A ordnar ett tal $\det A$ och som har följande egenskaper:

(i) determinanten är en linjär funktion av varje kolonn;

(ii) om två kolonner är lika så är det $= 0$;

(iii) det(enhetsmatris) $= 1$.

• *Bra att veta vid beräkning av determinanter (s. 245)*:

(a) Determinanten ändras ej om man till en kolonn lägger en annan kolonn multiplicerad med en konstant;

(b) Om två kolonner byter plats så byter determinant tecken.

Obs att samma gäller rader.

Exempel 7: Finn $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Lsg: Transformera matrisen antingen till en triangulär matris eller en matris som innehåller en rad elle en kolonn bestående av nollor. Använd egenskaperna.
Svar: 7

• *Några allmänna egenskaper till* (s. 248):

(c) $\det A^t = \det A$;

(d) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Utveckling efter en rad eller en kolonn

Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Ta bort från A i:e raden och j:e kolonnen.
Kalla den nya $((n-1) \times (n-1))$ matrisen $A(ij)$.

- *Underdeterminant till plats* ij *hos* A, D_{ij}, är $\det A(ij)$.
- *Algebraiskt komplement till plats* ij *hos* A, A_{ij}, är $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A(ij)$.

Sats (s. 251):

(i) $\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$ (utveckling efter i:e raden)

(ii) $\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (utveckling efter j:e kolonnen)

Exempel 8: Utveckla $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ efter 1:a raden och 3 kolonnen.

Lsg:

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (14-5) - 2 \cdot (4-3) + 0 = 7,$$

$$0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 - (5-6) + 2 \cdot (7-4) = 7$$