Fö 9:

December 16, 2023

Determinanter och linjära ekvationssystem

Betrakta ett linjärt ekvssystem $A \cdot X = B$, där A är en kvadratisk $(n \times n)$-matris och X, B $(n \times 1)$-matriser. Låt $C = [A|B]$ (utökade matrisen).

Gausselimination + eventuell omnumrering av obekanta (ingen bortkastning av rader bestående av nollor) transformerar C till en av följande matriser $C' = [A'|B']$:

$$(1) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{ en enda lsg. Obs att } \det A' = 1 \neq 0.$$

$$(2) \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \textit{ en k-parameter lsg.} \text{ Obs att } \det A' = 0.$$

$\uparrow$

k-kolonner efter sista ledande ettan

$$(3) \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{ inga lsgar alls. Obs att } \det A' = 0.$$

Observation. $\det A \neq 0$ om och endast om $\det A' \neq 0$.

Bevis: En elementär radoperation på en kvadratisk matris multiplicerar eventuellt matrisensdeterminant med en konstant $\neq 0$. Ett kolonnbyte (vid en eventuell omnumrering av variabler) ändrar bara tecken på determinanten.

Sats. (s. 271) Låt (*) $A \cdot X = B$ vara ett linjärt ekvssystem, där A är kvadratisk.

(i) Om $\det A \neq 0$ så har (*) precis en lsg.

(ii) Om $\det A = 0$ så har (*) antingen ingen lsg eller oändligt många lsgar.

Exempel 1. Betrakta systemet: $\begin{cases} x + k \cdot y = \frac{1}{2} \\ k \cdot x + 4 \cdot y = 1. \end{cases}$

För vilka reella k har systemet precis en lsg, inga lsgar, oändligt många lsgar?

Lsg: $\det A = 4 - k^2$. Ekv $4 - k^2 = 0$ har två lsgar: $k_1 = -2$ och $k_2 = 2$.

(i) Om $k \neq -2, 2 \Leftrightarrow \det A \neq 0$ så har systemet precis en lsg.

(ii) Om $k = 2$ så är $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-2) \\ \hookleftarrow (+) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ oändligt många lsgar;

(iii) Om $k = -2$ så är $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(2) \\ \hookleftarrow (+) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ inga lsgar.

Obs Varje homogent linjärt ekvssystem $A \cdot X = 0$ har alltid minst en lsg, (*den triviala lsgen* $X = 0$).

Följd. (s. 273) Låt (**) $A \cdot X = 0$ vara ett homogent linjärt ekvssystem, där A är kvadratisk.

(i) Om $\det A \neq 0$ så har (**) precis en lsg, $X = 0$.

(ii) Om $\det A = 0$ så har (**) oändligt många lsgar.

Exempel 2: Avgör om systemet $\begin{cases} x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0 \\ 2 \cdot x + y - 5 \cdot z = 0 \\ 3 \cdot x + 3 \cdot y - 2 \cdot z = 0 \end{cases}$
har fler än en lsg.

Lsg: Obs $\det = 0$. Så systemet har oändligt många lsgar.

• *Några påståenden till om allmäna linjära ekvssystem*:

Låt (*) $A \cdot X = B \neq 0$ och (**) $A \cdot X = 0$, där A är av typ $(m \times n)$.

(1) (*) har lsgar om och endast om $B \in$ kolonnrummet till A.

(2) Om X_1 är en lsg till (*) och Y_1 är en lsg till (**) så är $X_1 + Y_1$ en lsg till (*).

Dessutom om X_2 är en lsg till (*) så är $X_1 - X_2$ en lsg till (**).

Linjärt (o-)beroende vektorer. Bas. Dimension.

Definition (s. 285). Låt V vara ett vektorrum (till ex. R^n). Vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ är *linjärt oberoende* om ekv $x_1 \cdot \overline{a}_1 + \ldots + x_n \cdot \overline{a}_1 = \overline{0}$ m a p $x_1, \ldots, x_n$ har precis en lsg: $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (den triviala lsgen).

Annars säger man att vektorerna är *linjärt beroende.*

Exempel 3:

(1) En nollskild vektor $\overline{a}$ bildar ett linjärt oberoende system ty $x \cdot \overline{a} = \overline{0}$ om och endast om $x = 0$.

(2) Paret $\overline{0}, \overline{a}$ bildar ett linjärt beroende system ty $1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

Sats: Vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av vektorerna kan skrivas som en linjär kombination av övriga.

Bevis. Om $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \overline{a}_n = \overline{0}$ och $\lambda_1 \neq 0$ så är $\overline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \overline{a}_n$.
Om $\overline{a}_1 = \mu_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \overline{a}_n$ så är $x_1 = 1, x_2 = -\mu_2, \ldots, x_n = -\mu_n$ en icke-trivial lsg till ekv $x_1 \cdot \overline{a}_1 + \ldots + x_n \cdot \overline{a}_1 = \overline{0}$.

Exempel 4:

(1) två parallella vektorer i planet är linjärt beroende;

(2) två icke-parallella vektorer i planet är linjärt oberoende;

(3) tre vektorer i rummet som ligger i samma plan är linjärt beroende;

(4) tre vektorer i rummet som inte ligger i samma plan är linjärt oberoende.

Exempel 5: Undersök om vektorerna $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende.

Lsg. Ställ upp ekv $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + x_3 \cdot \overline{a}_3 = \overline{0}$, skriv om denna på koordinat form som ett linjärt ekvationssystem och lös detta m h a Gausselimination. Eller lägg märke till att ekvssystemmatrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är kvadratisk och denna har det $A \neq 0$.

Så systemet $A \cdot X = 0$ har en enda lsg. Detta medför att vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ är linjärt oberoende.
Är vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ linjärt beroende? Svar: nej. Varje delmängd av ett linjärt oberoende system av vektorer är också linjärt oberoende.

Exempel 6: Låt vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ vara från rummet R^m, där $n > m$. Då bildar vektorerna alltid ett linjärt beroende system.

Definition (s. 288). Vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ utgör *en bas* för rummet V om

(i) $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ är linjärt oberoende;

(ii) varje vektor $\overline{v} \in V$ kan skrivas som en linjär kombination av $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$
d v s $\overline{v} = k_1 \cdot \overline{a}_1 + k_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + k_n \cdot \overline{a}_n$.
(man säger att $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ *spänner upp* V)

• Koefficienterna $k_1, k_2, \ldots, k_n$ entydigt bestämda (de är *koordinaterna* för vektorn $\overline{v}$ i basen $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ (s. 289).

Exempel 7:

(1) två icke-parallella vektorer i planet utgör en bas i planet;

(2) tre vektorer i rummet som inte är parallella med samma plan utgör en bas i rummet;

(3) vektorerna $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas i rummet;

finn koordinaterna av vektorn $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ i denna bas (svar $1, 1, 1$),

(4) vektorerna $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4$ utgör ingen bas i rummet,

(5) standardbasen i R^n.

Extra uppgift: Låt V vara ett Euklidiskt rum och $\overline{a}, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ vektorer i V sådana att $\overline{a} \neq \overline{0}$ och $\overline{a} \cdot \overline{a}_i = 0$ för all $i \leq k$. Visa att $\overline{a}$ inte kan uttryckas som en linjär kombination av $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$. Härled sedan att om $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k$ är vektorer i R^n och $k < n$ så är $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k$ ingen bas för R^n.

Sats: Vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ utgör *en bas* för rummet R^n om och endast om $k = n$ och $\det[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n] \neq 0$.

Exempel 8: Finn en bas för underrummet

$$W = \{\overline{x} : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 0\}$$

av rummet R^4.

Svar: $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} -19 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sats: Antalet element i olika baser för rummet V är samma tal (om det finns en ändlig bas i rummet).

Detta tal kallas för *dimension* av V och betecknas $\dim V$.

Exempel 9 $\dim R^n = n$ och $\dim W = 2$.

• Låt A vara en matris av typ $m \times n$ med kolonnerna $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_n$.
Gausselimination transformerar A till en trappformad matris A'.

Låt $i_1, \ldots, i_p$ vara numren på kolonnerna i A' med ledande ettor.
Då utgör kolonnerna $\overline{k}_{i_1}, \overline{k}_{i_2}, \ldots, \overline{k}_{i_p}$ en bas för kolonnrummet till A.
Således är dim(kolonnrummet till A) $= p$.

Obs dim(nollrummet till A) $= n-p$ (antalet av parametrar i lsgsmängden till ekv $AX = 0$).

Fråga: *Hur hittar man en bas för radrummet till A?*

Svar: till ex. betrakta A^t och handla som ovan.

Obs dim(radrummet tillA) $= p$.

Exempel 10. Betrakta vektorer $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ i R^n. Samtliga linjär kombinationer av vektorerna bildar ett underrum V till R^n. Bestäm $\dim V$.

Lsg. Bilda en $(n \times k)$-matris A av vektorerna så att 1:a kolonnen är vektorn $\overline{a}_1$, 2:a kolonnen vektorn $\overline{a}_2$ o s v. Obs kolonnrummet till A är underrummet V.

Definition. Låt V vara ett euklidiskt vektorrum (d v s ett vektorrum med en skalärprodukt). Vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ utgör *en ON-bas* för rummet V om de är enhetsvektorer och är parvis ortogonala m a p den givna skalärprodukten.

Exempel 11. Standardbasen i R^n är en ON-bas m a p standardskalärprodukten.