Lektion 18 för Linjär algebra (TATA16)

1. Bestäm alla lsgar till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_2 \\ x_2' &= 2x_1 \end{aligned}$$

och finn speciellt den lsg som uppfyller villkoren: $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1.$

Svar: 1)

$$c_1 e^{-t\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix} + c_2 e^{t\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

2)

$$\frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{5})e^{-t\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5})e^{t\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

2. Bestäm alla lsgar till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 \end{aligned}$$

och finn speciellt den lsg som uppfyller villkoren: $x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 1.$

Svar: 1)

$$c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2)

$$\frac{1}{3} e^{-5} e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} e e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Bestäm alla lsgar till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_3 \\ x_3' &= 2x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Svar:

$$c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4. Bestäm alla lsgar till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_3 \\ x_3' &= -x_2 \end{aligned}$$

och finn speciellt den lsg som uppfyller villkoren: $x_1(0) = 5,\ x_2(0) = -4,\ x_3(0) = 0$.

Svar: 1)

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$3e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Bestäm alla lsgar till differentialekvationssystemet $X' = AX$, där A är avbildningsmatrisen för spegling i planet $2x_1+2x_2+x_3 = 0$ (se ex. 2.49).

   Kan vi lösa problemet utan att titta på matrisen?

Svar:

$$c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$