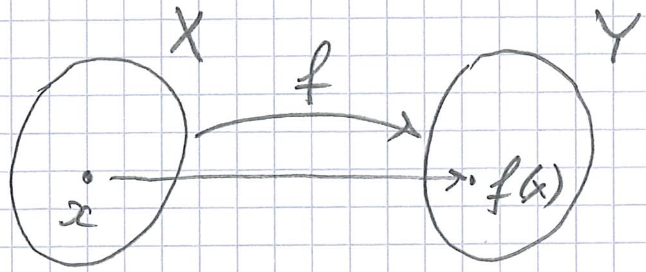
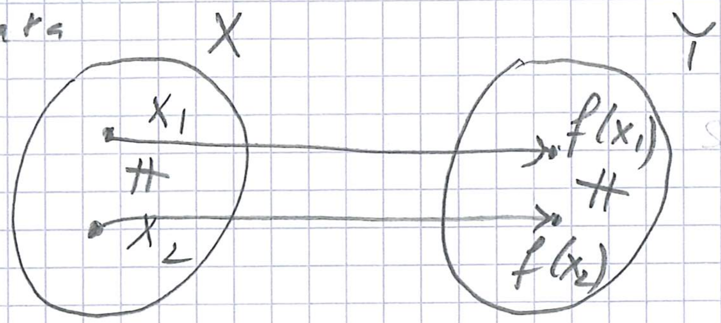
Inversa matriser



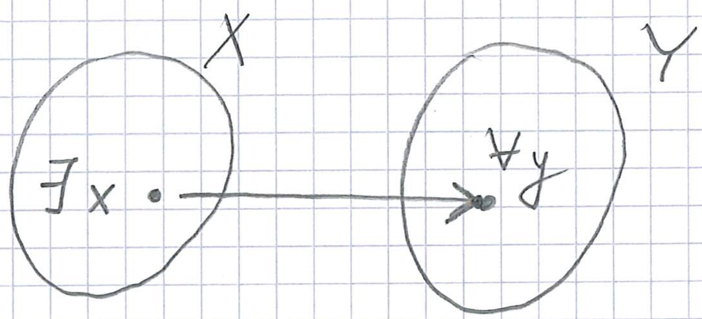
en avbildning

f säges vara

injektiv om



surjektiv om



bijektiv om f är injektiv & surjektiv

Obs f är bijektiv $\iff$ $\forall y \in Y$

har ekv $f(x) = y$

exakt en lsg x.

Exempel 1

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_A(\bar{x}) = A \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{= \bar{x}} =$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Obs Ekv $A \cdot \bar{x} = \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

saknar lsg ar $\Rightarrow T_A : R^2 \to R^2$

är icke bijektiv $\Rightarrow A$ är ej inverterbar

(ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_A(\bar{x}) = A\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Obs Ekv $A\bar{x} = \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

har exakt en lsg $\bar{x} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T_A$ är bijektiv $\Rightarrow A$ är inverterbar.

Sats Om $T : V \to W$ är linjär o bijektiv så är $T^{-1} : W \to V$ linjär o bijektiv.

(i) $T^{-1}(\bar{u} + \bar{v}) = T^{-1}(\bar{u}) + T^{-1}(\bar{v})$

$T(V.L) = \bar{u} + \bar{v}$, $T(H.L) = T(T^{-1}(\bar{u})) + T(T^{-1}(\bar{v}))$

$= \bar{u} + \bar{v} \Rightarrow V.L. = H.L.$

(ii) analogt $T^{-1}(\lambda \bar{u}) = \lambda T^{-1}(\bar{u})$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T \sim A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T^{-1} \sim A^{-1}} \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x} \longrightarrow T(\bar{x}) \longrightarrow T^{-1}(T(\bar{x})) = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} T^{-1}(T(\bar{x})) & = & \bar{x} \\ \| & & \| \\ A^{-1} \cdot A \cdot \bar{x} & = & E\bar{x} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{A^{-1} A = E}$ analogt $\underline{A A^{-1} = E}$

<u>Obs</u> Om $AB_1 = E$ o $B_1 A = E$

$AB_2 = E$ o $B_2 A = E$

så är $B_1 = B_2$

$$\left.\begin{array}{l} B_1 (A B_2) = B_1 E = B_1 \\ \quad \| \\ (B_1 A) B_2 = E B_2 = B_2 \end{array}\right| \Rightarrow B_1 = B_2$$

Isometriska avbildningar T ⇔ ON-matriser A

Egenskaper, bl.a.

(2) $A\bar{x} \cdot A\bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ ty

$|A(\bar{x}+\bar{y})|^2 = |\bar{x}+\bar{y}|^2$

$V.L = A(\bar{x}+\bar{y}) \cdot A(\bar{x}+\bar{y}) = (A\bar{x}+A\bar{y}) \cdot (A\bar{x}+A\bar{y})$

$= |A\bar{x}|^2 + 2A\bar{x} \cdot A\bar{y} + |A\bar{y}|^2 =$

$= |\bar{x}|^2 + 2A\bar{x} \cdot A\bar{y} + |\bar{y}|^2$

$H.L. = (\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) = |\bar{x}|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + |\bar{y}|^2$.

(4) Låt $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ men $T(\bar{x}_1) = T(\bar{x}_2)$

$\Rightarrow T(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \bar{0}$

Obs $|\bar{0}| = 0 \Rightarrow |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2$

$\Rightarrow$ T är injektiv ⇔ A är inverterbar.

Sats A är en ON matris $\Leftrightarrow$

Kolonnvektorerna är ortonormerade

$$(\Leftarrow): \begin{bmatrix} A\bar{e}_1 \cdot A\bar{e}_1 & \dots & A\bar{e}_1 \cdot A\bar{e}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ A\bar{e}_n \cdot A\bar{e}_1 & \dots & A\bar{e}_n \cdot A\bar{e}_n \end{bmatrix} = E$$

Obs $A\bar{x} \cdot A\bar{x} = (x_1 A\bar{e}_1 + \dots + x_n A\bar{e}_n) \cdot (x_1 A\bar{e}_1 + \dots + x_n A\bar{e}_n)$

$$= x_1^2 + \dots + x_n^2 \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{|T(\bar{x})|}}{|A\bar{x}|} = |\bar{x}|$$

$\Rightarrow$ A är en ON matris enligt definitionen.

Andra egenskaper hos ON-matriser:

(1) $\det A = \pm 1$

Obs $A^t \cdot A = E \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{|A|^2}}{|A^t \cdot A|} = |E| = 1$

$\Rightarrow |A| = \pm 1.$