Egenvärde o egenvektorer

def A är en $(n \times n)$ matris.

Vektor $\bar{v} \in R^n$ sägs vara
$\bar{v} \neq \bar{0}$

en egenvektor till A med egenvärde λ

om $A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$

Obs Här $\bar{v}$ är en kolonnmatris.

Tolkning:

$A\bar{v} = \lambda \bar{v} \parallel \bar{v}$

EX 1 (i) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, Obs $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ alla icke-triviala vektorer är egenvektorer med egenvärde $\lambda = 2$.

(ii) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, är egenvektorer med $\lambda = 2$ etc.

Exempel 2 Bestäm egenvärden o egenvektorer

till $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Lsg. (i) $|A - \lambda E| = 0$ eller $\begin{vmatrix} (6-\lambda) & 2 \\ 2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

(sekulärekv)

eller $(6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$ eller $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2, 7$ (egenvärdena)

(ii) $\lambda_1 = 2$: $(A - \lambda_1 E)\cdot\bar{v} = \bar{0}$ eller

$\left[\begin{array}{cc|c} (6-2) & 2 & 0 \\ 2 & (3-2) & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$

$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$ $v_2 = t$, $v_1 = -\frac{1}{2}t$ eller

$\bar{v} = t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$ $\Rightarrow$ $t\cdot\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, är

alla egenvektorer till A

med egenvärde $\lambda_1 = 2$

Analogt, $\lambda_1 = 7$:

$\Rightarrow$ $s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$, är alla egenvektorer

till A med $\lambda_2 = 7$.

Basbyte

$G = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ en bas för V.

Om $\bar{x} \in V$ så är $\bar{x} = x_1 \cdot \bar{v}_1 + \dots + x_n \cdot \bar{v}_n =$

$$= (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= X} = G \cdot X$$

$\mathcal{F} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ är en bas till för V,

$\bar{w}_1 = G \cdot W_1, \dots, \bar{w}_n = G \cdot W_n$

Obs $\mathcal{F} = (G \cdot W_1, \dots, G \cdot W_n) =$

$$= (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \underbrace{\left[W_1 \,\middle|\, W_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, W_n \right]}_{P} = G \cdot P$$

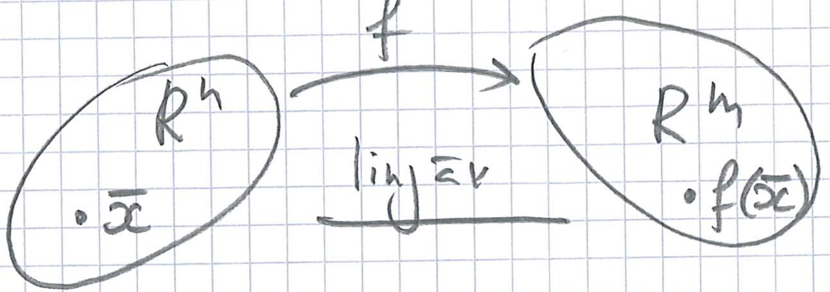
Analogt, det finns Q s.a.

$G = \mathcal{F} \cdot P$.

Obs $P = Q^{-1}$

Om $\bar{x} = \mathcal{F} \cdot Y$ så är $X = P \cdot Y$ o $Y = Q \cdot X$

Basbyten o lin. avbildningar



$\underline{e} = (\bar e_1 \dots \bar e_n)$ $\qquad\qquad$ $\underline{e}' = (\bar e_1', \dots, \bar e_m')$

$$f(\bar x) = f(x_1 \cdot \bar e_1 + \dots + x_n \cdot \bar e_n) = x_1 \cdot f(\bar e_1) + \dots + x_n \cdot f(\bar e_n)$$

$$= \underbrace{\left(f(\bar e_1), \dots, f(\bar e_n)\right)}_{f(\underline{e})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:X} = f(\underline{e}) \cdot X$$

X: Koordinat matrisen för $\bar x$

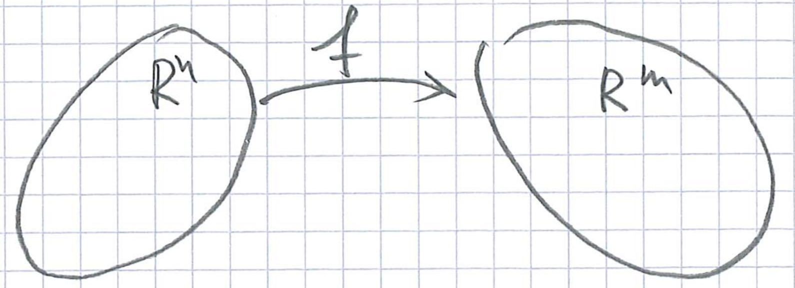
Obs $f(\bar e_i) = (\bar e_1', \dots, \bar e_m') \cdot [f(\bar e_i)]_{\underline{e}'}$, $\quad i \le n$.

$[f(\bar e_i)]_{\underline{e}'}$: Koordinatmatrisen av $f(\bar e_i)$ i $\underline{e}'$

$$\Rightarrow f(\bar x) = (\bar e_1', \dots, \bar e_m') \cdot \underbrace{\left[[f(\bar e_1)]_{\underline{e}'} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, [f(\bar e_n)]_{\underline{e}'} \right]}_{= A} \cdot X$$

$$= \underline{e}' A \cdot X$$

A: avbildningsmatrisen för f m a p $\underline{e}$ o $\underline{e}'$



$F = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ $\quad\quad$ $F' = (\bar{w}_1', \ldots, \bar{w}_m')$

$\underline{F = G \cdot P}$ $\leftarrow$ låt $\rightarrow$ $\underline{F' = G' \cdot P'}$

Koordinatmatrisen för $\bar{x}$

Analogt, $f(\bar{x}) = F' \cdot B \cdot Y$, där

B avbildningsmatrisen för f m.a.p. F o F'

$\Rightarrow f(\bar{x}) = G' \cdot A \cdot X = \underbrace{F'}\cdot B \underbrace{Y} = \underbrace{G' P'} \cdot B \cdot \underbrace{P^{-1} X}$

$\Rightarrow \boxed{A = P' \cdot B \cdot P^{-1}}$

(sambandet mellan A o B)

I fall $\underline{n = m}$ o $G = G'$, $F = F'$

(f betraktas i samma rum R^n)

$\Rightarrow P = P'$ o $\boxed{A = P \cdot B \cdot P^{-1}}$, där

P är övergångsmatrisen från G till F

(basbytematrisen)

(Ortogonalt) diagonaliserbarhet

(*) $A = P \mathcal{D} P^{-1}$ $\quad (A = P \mathcal{D} P^t)$

P inverterbar matris (en ON matris)

$\mathcal{D}$ diagonalmatris

$(*) \Longleftrightarrow \quad AP = P\mathcal{D}$

$$V.L. = \left[A \cdot \bar{p}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A \cdot \bar{p}_n \right]$$

$$H.L. = \underbrace{[\bar{p}_1 \,|\, \cdots \,|\, \bar{p}_n]}_{= P} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}^{= \mathcal{D}} =$$

$$= \left[\lambda_1 \bar{p}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \lambda_n \cdot \bar{p}_n \right]$$

Jämför kolonnvis $\Rightarrow$ $\underline{A \cdot \bar{p}_i = \lambda_i \cdot \bar{p}_i}$, $i \leq n$

$\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ egenvektorer med egenvärde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

<u>Sats</u>: A är en $(n \times n)$ matris

A är (ortog.) diagonal. $\Longleftrightarrow$ A har n stycken (parvis ortog.) lin. <u>oberoende</u> egenvektorer.