Dinamiska system

Exempel 1:

(en del)

$$(*)\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\quad (*):\ Y' = A\cdot Y$$

Sekularekvat: $|A - \lambda E| = 0$ eller $\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_{1,2} = \underline{1,\ 4.}$

$$\lambda_1 = 1:\ \left[\begin{array}{cc|c} (2-1) & 1 & 0 \\ 2 & (3-1) & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \\ \hline \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim\ v_1 + v_2 = 0$$

$v_2 = t,\ v_1 = -t \ \Rightarrow\ \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in R$

$\Rightarrow\ \underline{t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0,}$ är samtliga egenvektorer till A motsvarande $\lambda_1 = 1$

Analogt, $\lambda_2 = 4$: $\Rightarrow\ \underline{t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \neq 0}$.

Sätt $t = 1$: $\Rightarrow\ \bar{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

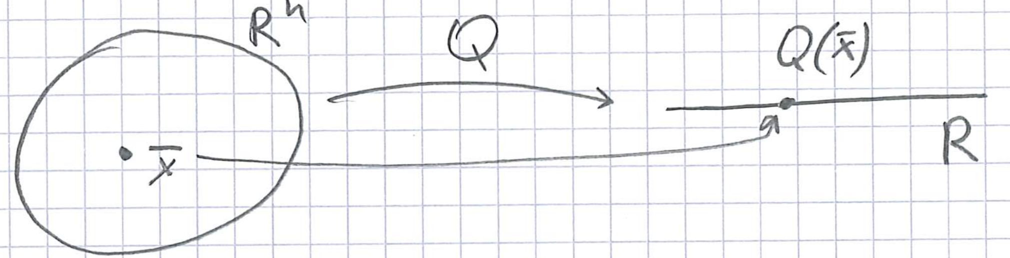
är en bas för R^2 bestående av egenvektorer

Kvadratiska former

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1 \dots x_n)\cdot A\cdot \overset{X}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}} = X^t\cdot A\cdot X$$

där A är en $(n\times n)$ symmetrisk matris, kallas en kvadratisk form i variablerna $x_1 \dots x_n$.

En tolkning:



$$\bar{x} = x_1\cdot\bar{e}_1 + \dots + x_n\cdot\bar{e}_n, \quad \mathcal{E} = (\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n)$$

Obs $A = P\cdot D\cdot P^t$, där $P = [\bar{p}_1|\dots|\bar{p}_n]$ med $\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_n$ är en ON bas av egenvektorer för A o D är en diagonalmatris

Inför $\mathcal{F} = (\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_n)$. Obs $\mathcal{F} = \mathcal{E}\cdot P$, $P^{-1} = P^t$,

$$\bar{x} = y_1\cdot\bar{p}_1 + \dots + y_n\cdot\bar{p}_n = \mathcal{F}\cdot Y \quad \text{o} \quad X = PY$$

$$Q(\bar{x}) = X^t\cdot A\cdot X = (PY)^t\cdot A\cdot(PY) = Y^t\cdot \underbrace{P^t\cdot P}_{E}\, D\, \underbrace{P^t P}_{E}\, Y =$$

$$= Y^t\cdot D\cdot Y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Exempel 4: (en del)

$$\underbrace{9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2}_{Q(x_1,x_2)} - 5 = 0 \quad (\#)$$

$$Q(\bar{x}) = (x_1\ x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 5, 10$$

$\Rightarrow \bar{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en ON bas

av egenvektorer till A

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \underline{A = P D P^t}$$

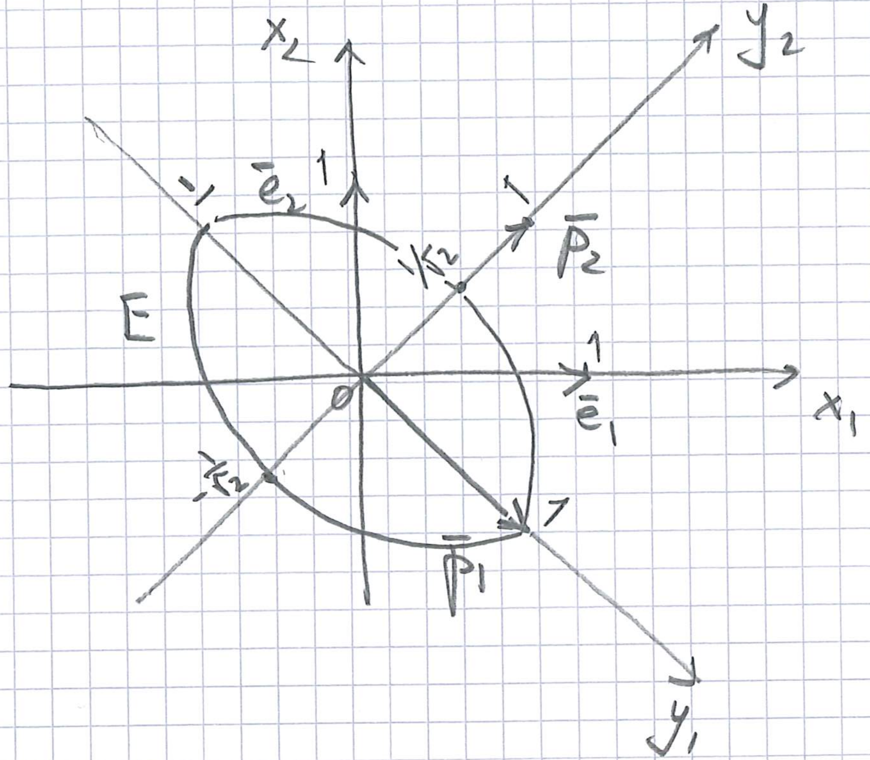
Variabelbyte: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ eller $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) \end{cases}$

Insättning i (#) ger:

$$5y_1^2 + 10y_2^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + 2y_2^2 - 1 = 0$$

eller $\quad \underline{y_1^2 + \dfrac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1}$ (en ellips).

E



En tillämpning till:

<u>Sats</u>: $Q(\bar{x}) = X^t \cdot A \cdot X$ $\underline{o}$ λ_{min}, λ_{max}

<u>minsta</u> resp. <u>största</u> egenvärde till A.

Då gäller bl.a.

$$\lambda_{min} \cdot |\bar{x}|^2 \leq Q(\bar{x}) \leq \lambda_{max} \cdot |\bar{x}|^2$$

<u>Obs</u> $Q(\bar{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ $\underline{o}$

$$\lambda_{min} \underbrace{(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}_{= |\bar{x}|^2} \leq Q(\bar{x}) \leq \lambda_{max} \underbrace{(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}_{= |\bar{x}|^2}$$