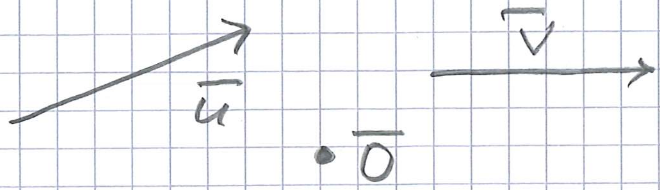
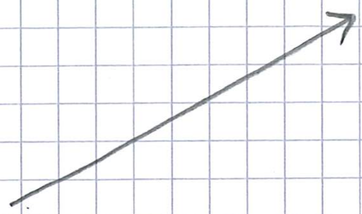
Geometriska vektorer i planet (rummet) med operationer.

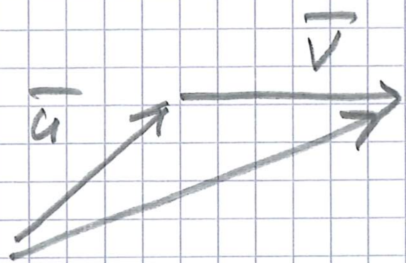


etc

- $\lambda \cdot \bar{u}$



- $\bar{u} + \bar{v}$



Geometri

(*) Betrakta en bas i planet då

$$\bar{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{ordnat par}} \qquad \left(\bar{u} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 \right)$$

analogt $\bar{v}$ etc

- $\underbrace{\lambda \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}}$

- $\underbrace{\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}}$

Algebra

Samma i rummet: $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ etc

Generalisera!

Sats (egenskaper)

(1) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

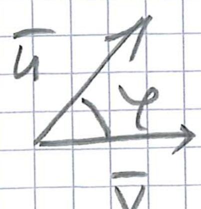
Bevis:

$$V.L. = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{u} + \bar{v} = H.L.$$

Analogt med egenskaperna (2)-(8)

Skalärprodukten



$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cos\varphi$$

Med en bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ som är ON

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}$$

Analogt i rummet.

Generalisera!

Sats (egenskaper)

(i) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

Bevis: $V.L = \bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n =$

$= y_1 \cdot x_1 + \ldots + y_n \cdot x_n = \bar{v} \cdot \bar{u} = H.L.$

Analogt, (ii) – (iv)

Ex. 3: $|k \cdot \bar{v}| = |k| \cdot |\bar{v}|$

Bevis: $V.L. = \sqrt{(k \cdot \bar{v}) \cdot (k \cdot \bar{v})} = \left| \; k \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} k \cdot y_1 \\ k \cdot y_2 \\ \vdots \\ k \cdot y_n \end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{(k \cdot y_1)^2 + \ldots + (k \cdot y_n)^2} =$

$= |k| \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2} = |k| \cdot \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |k| \cdot |\bar{v}| = H.L.$

Räta linjer i R^n

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

Plan i R^n

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad t, s \in R$$

(<u>två</u>-dimensionella)

Analogt, k-dimensionella, $k < n$.

<u>Repetera</u> satser om egenskaper hos <u>addition</u> <u>o</u> <u>multiplikation med en konstant</u> hos geometriska vektorer <u>o</u> element i R^n.

Ex 4 (iii)

Alla reellvärda funktioner definierade på R med operationer

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in R$ (definieras punktvis)
- $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ —"—

bildar ett vektorrum

Bevis: (1) $\bar{u} \oplus \bar{v} = \bar{v} \oplus \bar{u}$

$$V.L. = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) =$$

$$= (g+f)(x) \quad \forall x \in R \quad = H.L.$$

Analogt, (2) – (8)

Ex 5 $\quad V = R^2$ med operationer

- $\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$
- $k \cdot \bar{u} = k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Inget vektorrum: Obs $1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(8) faller!

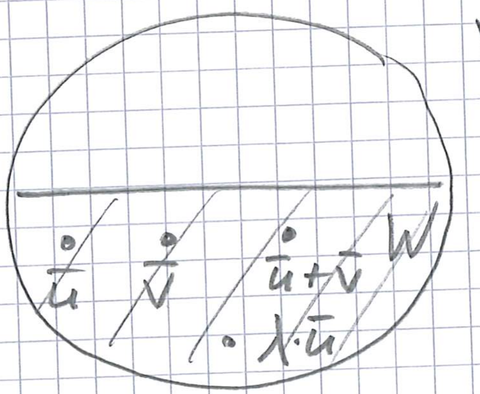
Sats (Kriterium) V är ett vektorrum

$W \subset V$ är ett underrum till $V \iff$

F.g. (i) om $\bar{u}, \bar{v} \in W$ så är $\bar{u} + \bar{v} \in W$

(ii) om $\lambda \in R$ o $\bar{u} \in W$ så är

$\lambda \cdot \bar{u} \in W$



EX. V är ett vektorrum o $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \in V$

$$L(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = \{ p_1 \cdot \bar{u}_1 + \dots + p_k \cdot \bar{u}_k : p_i \in R \}$$

utgör ett underrum till V.

Bevis: • $(p_1 \cdot \bar{u}_1 + \dots + p_k \cdot \bar{u}_k) + (q_1 \cdot \bar{u}_1 + \dots + q_k \cdot \bar{u}_k) =$

$$= (p_1 + q_1) \cdot \bar{u}_1 + \dots + (p_k + q_k) \cdot \bar{u}_k \in L(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$$

$$\lambda (p_1 \cdot \bar{u}_1 + \dots + p_k \cdot \bar{u}_k) = (\lambda p_1) \bar{u}_1 + \dots + (\lambda p_k) \cdot \bar{u}_k \in L(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$$

Låt $\bar{u}\cdot\bar{v}$ vara en skalärprodukt på ett vektorrum V. Då är $(\bar{u}\cdot\bar{v})_1 = a\cdot(\bar{u}\cdot\bar{v})$ en skalärprodukt på V, där $\underline{a>0}$

<u>Obs</u> $a\cdot(\bar{u}\cdot\bar{v})$ är ett tal för alla $\bar{u}, \bar{v}$.

(i) $(\bar{u}\cdot\bar{v})_1 = (\bar{v}\cdot\bar{u})_1$

$$V.L = a\cdot(\bar{u}\cdot\bar{v}) = a\cdot(\bar{v}\cdot\bar{u}) = (\bar{v}\cdot\bar{u})_1 = H.L.$$

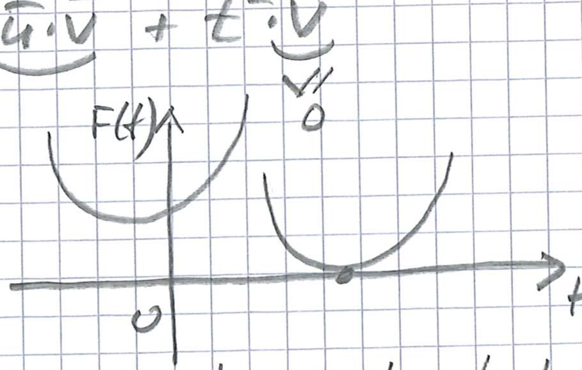
Analogt med (ii) – (iv).

$$\bar{u} = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}$$

Visa att $|\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$

<u>Bevis</u>: Betrakta $F(t) = (\bar{u} + t\bar{v})^2 \underline{\underline{\geq 0}}$

<u>Obs</u> $F(t) = \underbrace{\bar{u}^2} + 2t\underbrace{\bar{u}\cdot\bar{v}} + t^2\underbrace{\bar{v}^2}_{\geq 0}$



En parabel av typ
d.v.s. högst en reell rot

$$\Rightarrow \quad (\bar{u}\cdot\bar{v})^2 - \bar{u}^2\cdot\bar{v}^2 \leq 0 \Rightarrow |\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|.$$