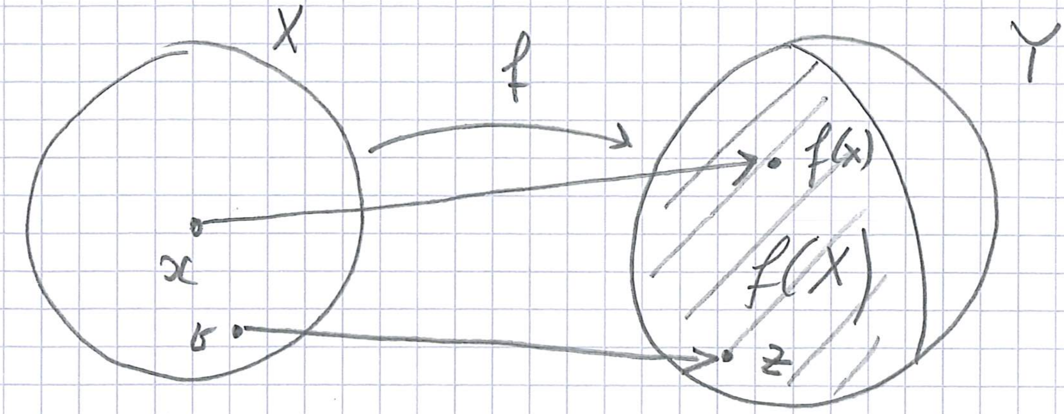
En avbildning $f: X \to Y$



X definitionsmängden av f

$fX = \{z \in Y$ s.a. $\exists\, v \in X$ som avbildas på $z\}$

värdemängden av f

Def. En avbildning $f: R^n \to R^m$ mellan vektorrum R^n o R^m sägs vara linjär om

$f(\bar{x}) = A \cdot \bar{x} \quad \forall$ vektor $\bar{x} \in R^n$, där

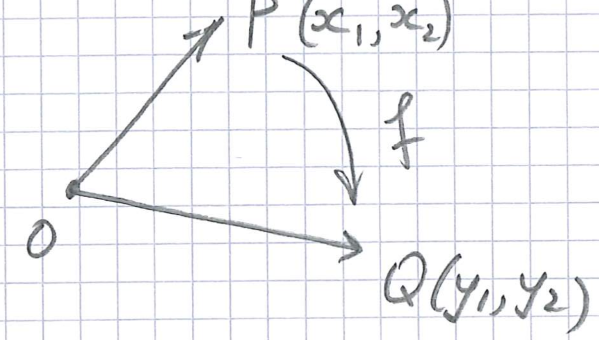
A är en $(m \times n)$-matris (avbildningsmatrisen)

o $\bar{x}$ presenteras som en kolonnmatris $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Obs $A \cdot \bar{x}$ är en kolonnmatris $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Linjära avbildningar i planet o i rummet med ett ON-koordinatsystem.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad f: R^2 \to R^2$$



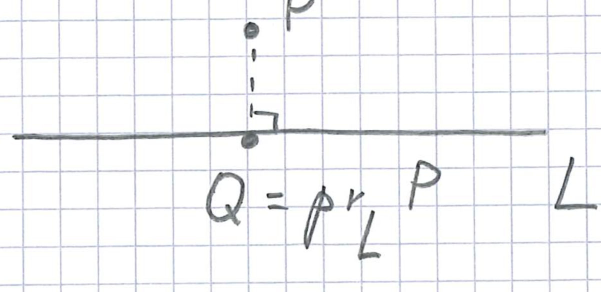
geometriska vektorer

$$P \xrightarrow{f} Q$$

punkter

Projektioner (ortogonala)

• (Ort) projektion på en rät linje L i planet: varje punkt P i planet avbildas på den punkt $Q \in L$ som ligger närmast.

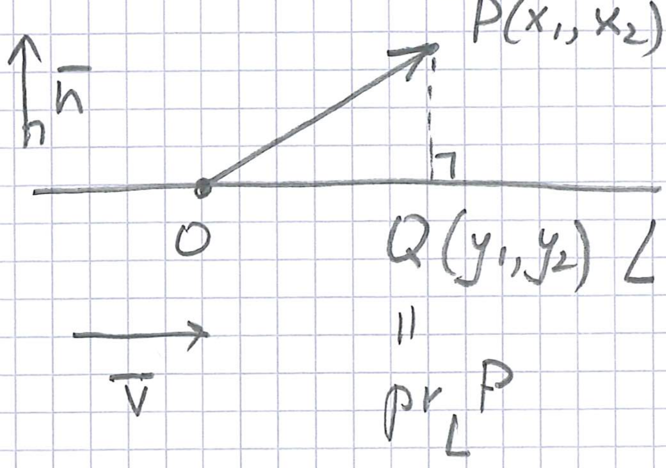


Analogt med (ort) projektion på ett plan π i rummet.

Ex 3: $\quad L: 2z_1 - z_2 = 0$

visa att projektionen på L är linjär (1)

o bestäm dess matris (2)



Obs

(i) origo $\in L$

(ii) $\bar{n}(2,-1) \perp L$

(iii) $\bar{v}(1,2) \parallel L$

$$\Rightarrow \overline{OQ} = pr_L \overline{OP} = \ldots = \Big(\underbrace{\frac{x_1+2x_2}{5}}_{=\,y_1}, \underbrace{\frac{2x_1+4x_2}{5}}_{=\,y_2}\Big)$$

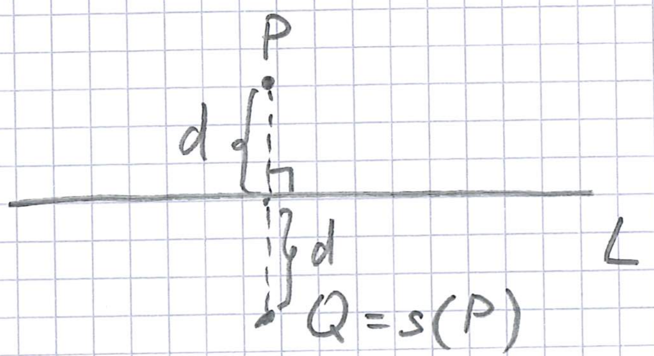
$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \\ y_2 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow pr$ är linjär

o $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

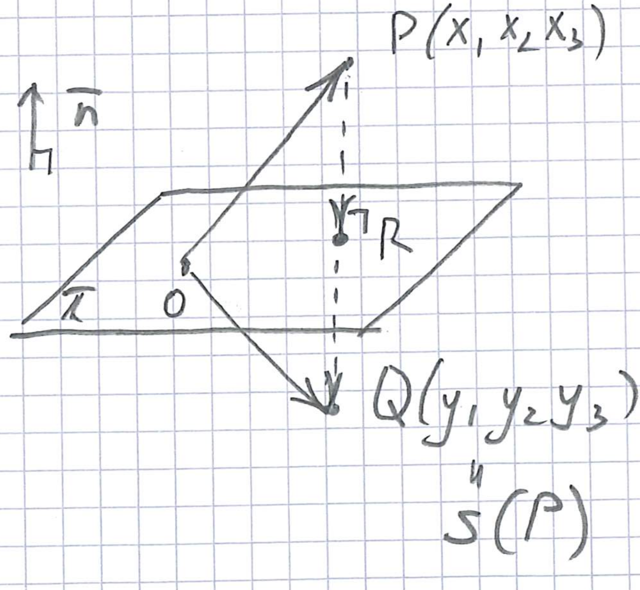
Spegling

Spegling i en rät linje L i planet:
varje punkt P i planet avbildas på den punkt Q som har samma avstånd till linjen L som P o som är sådan att vektor $\overline{PQ} \perp L$.



Analogt med spegling i ett plan π i rummet.

Ex 4. $\pi: 2z_1 + 2z_2 + z_3 = 0$
Visa att spegling i π är linjär (1) o bestäm dess matris (2)



Obs (i) origo $\in \pi$

(ii) $\overline{n}(2,2,1) \perp \pi$

(iii) $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} =$

$= \overline{OP} - 2\,pr_{\overline{n}}\, \overline{OP}$

$$\Rightarrow \overline{OQ} = \left(\underbrace{\frac{x_1 - 8x_2 - 4x_3}{9}}_{y_1}, \underbrace{\frac{-8x_1 + x_2 - 4x_3}{9}}_{y_2}, \underbrace{\frac{-4x_1 - 4x_2 + 7x_3}{9}}_{y_3} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{9}(x_1 - 8x_2 - 4x_3) \\ y_2 = \frac{1}{9}(-8x_1 + x_2 - 4x_3) \\ y_3 = \frac{1}{9}(-4x_1 - 4x_2 + 7x_3) \end{cases}$$

$\Rightarrow S$ är linjär

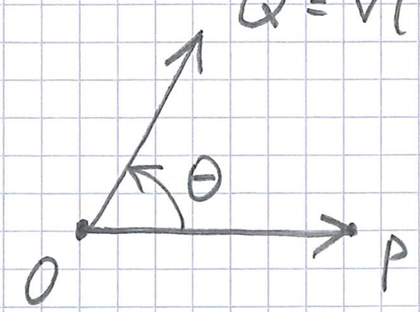
o

$$\underline{A} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Vridning

Vridning av planet vinkeln θ kring en fix punkt O: varje punkt P avbildas på den punkt Q som är spetsen av $\overline{OQ}$ i vilken $\overline{OP}$ övergår med vridning vinkeln θ i punkten O.

$$Q = v(P)$$

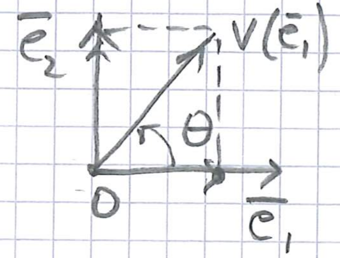


Ex 5 Vridning f av planet vinkeln θ kring origo är en linjär avbildning (givet)

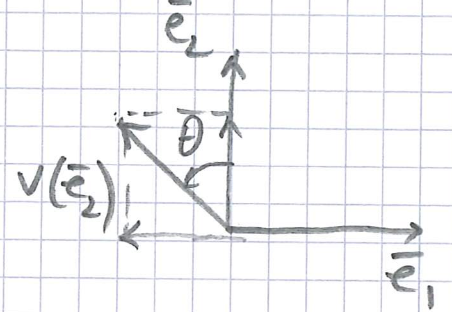
Bestäm dess avbildningsmatrisen

Obs

$$A = \left[\underbrace{v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{v(\bar{e}_1)} \;\vdots\; \underbrace{v\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{v(\bar{e}_2)} \right] \quad \text{(på koordinatform)}$$



$$v(\bar{e}_1) = \cos\theta\,\bar{e}_1 + \sin\theta\,\bar{e}_2$$

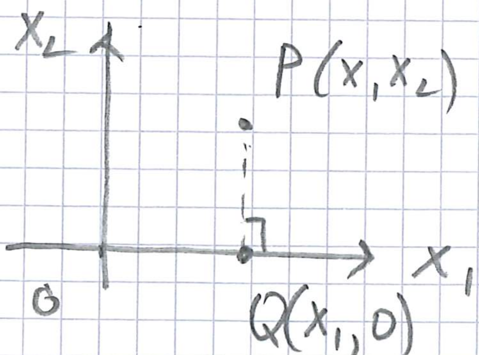


$$v(\bar{e}_2) = -\sin\theta\cdot\bar{e}_1 + \cos\theta\cdot\bar{e}_2$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

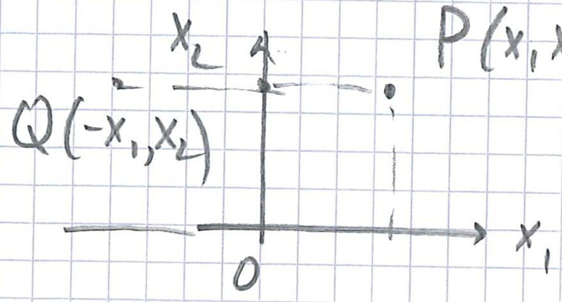
Andra exempel:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ (ort) projektion på x_1-axeln

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ spegling i x_2-axeln.

<u>Sats</u> $f: R^n \to R^m$ är linjär. Då gäller

(i) $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$

<u>Bevis</u> $V.L. = A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) = HL.$

Analogt (ii)

- <u>Varje rät linje</u> avbildas på <u>en rät linje</u> eller <u>en punkt</u> (under en <u>linjär</u> avbildning)

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = A\Big(\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}}_{\text{en punkt}} + t\underbrace{\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}_{\text{en riktningsvektor}}}^{\text{en rät linje.}}\Big) = \overbrace{A\cdot\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}}^{\text{en punkt}} + t\cdot\underbrace{A\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}_{\text{en riktningsvekt. eller } \bar{0}.}$$

är en rät linje eller en punkt.

Sats

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "f\sim A", "\text{linjär}"'] \arrow[rr, bend right] & R^m \arrow[r, "g\sim B", "\text{linjär}"'] & R^p
\end{tikzcd}$$

$$g\circ f \sim B\cdot A$$

linjär — **Obs** ordning!

Bevis:

$$(g\circ f)(\bar{x}) = g(f(\bar{x})) = g(A\cdot\bar{x}) =$$

$$= B(A\cdot\bar{x}) = (B\cdot A)\cdot\bar{x}$$

Allmänt om linjära avbildningar

Def. $f: V\to W$ är linjär om

(i) $f(\bar{x}_1+\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$

(ii) $f(\lambda\cdot\bar{x}) = \lambda f(\bar{x})$

Obs $f(\bar{0}) = f(\bar{0}+\bar{0}) = f(\bar{0}) + f(\bar{0}) \Rightarrow$

$f(\bar{0})$ är nollelement i W om $\bar{0}$ är noll i V.