Determinanter o lin. ekvssystem

Exempel 1

$$(*)\begin{cases} x + ky = \frac{1}{2} \\ k\cdot x + 4y = 1 \end{cases}$$ där k är en parameter.

$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{bmatrix}$, $\det A = 4 - k^2$.

$\det A = 0 \iff k = \pm 2$.

(i) $k \neq \pm 2$, $(*)$ har precis en lsg.

(ii) $k = 2$, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{ccc} x & y & \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$ ($\times(-2)$, $+$)

$\sim x + 2y = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x = -2t + \frac{1}{2} \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $\left(\frac{\text{en parameter}}{\text{lsg}}\right)$

(iii) $k = -2$, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{ccc} x & y & \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$ ($\times 2$, $+$)

$\sim 0\cdot x + 0\cdot y = 2 \iff \emptyset$ (inga lsgr)

Exempel 4

Obs Låt $\bar{a}, \bar{b}$ vara vektorer i planet.

o $\bar{a} \neq \bar{0}$. Då gäller

$\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \exists$ ett tal k s.a. $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$

(1) $\bar{b} = k \cdot \bar{a} \iff k \cdot \bar{a} + (-1) \cdot \bar{b} = \bar{0}$

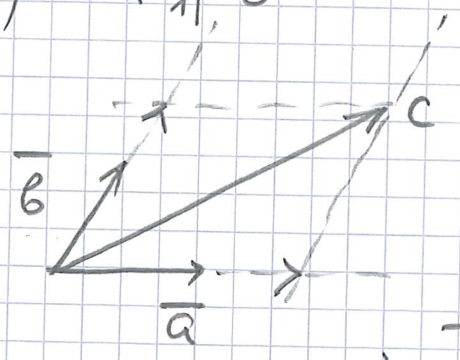
$\Rightarrow \bar{a}, \bar{b}$ är lin. beroende.

(3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ligger i samma plan

(i) $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}$ är lin. beroende

$\Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ är lin. beroende (Varför?)

(ii) $\bar{a} \nparallel \bar{b}$



Obs $\exists$ k, μ s.a.

$\bar{c} = k \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{b}$

$\Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ är lin. beroende.

Exempel 5

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Är vektorerna lin (o)beroende?

$$x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + x_3 \cdot \bar{a}_3 = \bar{0}$$ eller

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ eller

$$(*) \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \underline{\text{Obs}} & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{array}$$

$$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $(*)$ har en enda lsg $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\Rightarrow$ $\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3$ är lin oberoende.

Låt $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ vara en bas för rummet V o $\bar{v} \in V$.

Obs $\exists$ $k_1, \ldots, k_n$ s.a. $\bar{v} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_n\bar{a}_n$ o $k_1, \ldots, k_n$ är entydigt bestämda:

Om det finns $s_1, \ldots, s_n$ s.a.

$\bar{v} = s_1\bar{a}_1 + \ldots + s_n\bar{a}_n$ så jämför två summor: $\bar{0} = \bar{v} - \bar{v} = (k_1 - s_1)\bar{a}_1 + \ldots + (k_n - s_n)\bar{a}_n$

$\Rightarrow k_1 = s_1, \ldots, k_n = s_n$ (ty $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ är lin. oberoende)

Sats $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$ är en bas för $R^n \Leftrightarrow$ $k = n$ o $\det[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n] \neq 0$

($\Rightarrow$) Använd Exempel 6 o Extra uppgift samt första delen av Fö.

($\Leftarrow$) Använd första delen av Fö.

A är en $(m \times n)$ matris

$$\overbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \ & A & \ \end{array}\right)}^{\overline{K}_1 \ \cdots \ \overline{K}_n} \xrightarrow{\text{Gauss trasformera}} \left(\begin{array}{c} \text{en trappformad} \\ \text{matris } A' \\ \text{med } \underline{\text{ledande ettor}} \end{array}\right)$$

Kolonnerna

Låt $i_1, \ldots, i_p$ vara numren på kolonnerna i A' med ledande ettor. Då är $\overline{K}_{i_1}, \ldots, \overline{K}_{i_p} = \{K\}$ en bas för kolonnrummet till A:

(i) $\overline{K}_{i_1}, \ldots, \overline{K}_{i_p}$ <u>lin. oberoende</u> ty

$$x_1 \cdot \overline{K}_{i_1} + \ldots + x_p \cdot \overline{K}_{i_p} = \overline{0}$$

$$\underset{\text{(del av A)}}{A_K} \xrightarrow[\text{Gauss transformera}]{} A'_K = \underset{\text{(del av } A'\text{)}}{\begin{bmatrix} 1 & & X \\ & 1 & \\ O & & 1 \end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow$ K är lin oberoende

(ii) betrakta $\overline{K}_{i_1}, \ldots, \overline{K}_{i_p}, \overline{K}_m$ lin beroende ty

$$x_1 \overline{K}_{i_1} + \ldots + x_p \cdot \overline{K}_{i_p} + x \overline{K}_m = \overline{0}$$

$$A_{K,m} \longrightarrow A'_{K,m} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & X \\ O & & 1 & \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ K, m är lin. beroende.