Övning 12-13 för Linjär algebra (TATA16)

1. För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{aligned}(a-1)x+(a-1)y&=1\\ ax-(a-3)y&=3\end{aligned}$$

precis en lsg, resp. oändligt många lsgar och inga lsgar?

Svar: $a\neq 1,\frac{3}{2}$; $a=\frac{3}{2}$; $a=1$.

2. För vilka värden på a har systemetet

$$\begin{aligned}ax+y+2z&=0\\ x+ay+z&=0\\ 2x+2y+az&=0\end{aligned}$$

oändligt många lsgar? Ange lsgarna i fallet.

Svar: $a=1,2,-3$; om $a=1$ så är lösningsmängden: $x=-t,y=t,z=0,\ t\in R$, om $a=2$ så är lösningsmängden: $x=-t,y=0,z=t,\ t\in R$, om $a=-3$ så är lösningsmängden: $x=\frac{7}{8}t,y=\frac{5}{8}t,z=t,\ t\in R$

3. Låt A vara en $(m\times n)$-matris, där $m<n$. Visa att kolonnerna utgör alltid ett linjärt beroende system.

Ledning: Obs att motsvarande homogent system har alltid icke-triviala lösningar

Ge ett exempel av en (2×3)-matris då raderna är linjärt beroende och ett exempel av en (2×3)-matris då raderna är linjärt oberoende.

Svar: $\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&2&-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&2&-4\end{pmatrix}$

4. Låt

$$\bar{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\bar{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\bar{c}=\begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix}.$$

Är vektorerna linjärt oberoende? Spänner dem upp rummet R^3? Bildar vektorerna en bas för R^3?

Svar: Ja; Ja; Ja.

5. Ange en bas för R^4 som skiljas från standardbasen.

Svar: $\bar{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\bar{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\bar{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\bar{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$

6. Betrakta rummet $M_{2,2}$ av alla (2×2)-matriser med standarda operationer på matriser: addition och multiplikation med tal. Finn en bas för $M_{2,2}$. Vad är dimensionen av $M_{2,2}$?

   Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\dim = 4$

7. Betrakta rummet P_2 av samtliga polynom av grad till och med 2. Ange en bas för rummet. Vad är dimensionen av P_2?

   Svar: $1 + x + x^2, 1 + x, 1$; $\dim = 3$

8. Betrakta underrummet $W = \{$ samtliga lsgar till ekv $x + 2y + 3z = 0\}$ av R^3. Ange en bas för rummet W. Vad är dimensionen av W?

   Svar: $\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\dim = 2$