Övning 15-16 för Linjär algebra (TATA16)

1. Finn om det är möjligt två linjärt oberoende egenvektorer till följande matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Svar: för A och B $(1,0),(0,1)$, C saknar, för D $(1,-1),(1,1)$

2. Finn om det är möjligt tre parvis ortogonala egenvektorer till matriser (själva matriser behöver vi inte) som svarar mot

   (i) ortogonala proektionen på planet: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$;
   Svar: $(1,2,3)$ (egenvärdet 0) och $(2,-1,0),(3,6,-5)$ (egenvärdet 1)

   (ii) ortogonala proektionen på linjen: $x_1 = t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = 3t$;
   Svar: $(1,2,3)$ (egenvärdet 1) och $(2,-1,0),(3,6,-5)$ (egenvärdet 0)

   (iii) rotationen av rummet kring linjen: $x_1 = 3t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = t$.
   Svar: finns ej

3. Låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ vara tre parvis ortogonala icke-trivialla vektorer i rummet. Visa att de är linjärt oberoende.

   Ledning: utgå från definitionen och egenskaper hos skalärprodukter.

4. Låt V vara ett vektorrum och $\overline{v}_1,\ \overline{v}_2$ linjärt oberoende vektorer i V. Låt också $\overline{w}_1 = p_{11}\overline{v}_1 + p_{21}\overline{v}_2$ och $\overline{w}_1 = p_{12}\overline{v}_1 + p_{22}\overline{v}_2$. Beteckna $\mathcal{F} = (\overline{v}_1,\ \overline{v}_2)$, $\mathcal{G} = (\overline{w}_1,\ \overline{w}_2)$,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

   Observera att $\mathcal{G} = \mathcal{F}P$. Visa att

   (i) $\mathcal{G}$ är linjärt oberoende <=> $\det P \neq 0$;

   (ii) om $\det P \neq 0$ och $\mathcal{F}$ spänner upp V så spänner även $\mathcal{G}$ upp V;

   (iii) om $\det P \neq 0$ och $\mathcal{F}$ är en bas för V så är även $\mathcal{G}$ en bas för V;

   (iv) om $\mathcal{F}$ och $\mathcal{G}$ är två (ON-) baser för V så finns en (ON-) matris P s. a. $\mathcal{G} = \mathcal{F}P$ och $\mathcal{F} = \mathcal{G}P^{-1}$.

5. Vektorer $\mathcal{F} = (\overline{v}_1(1,2),\ \overline{v}_2(2,1))$ och $\mathcal{G} = (\overline{w}_1(3,2),\ \overline{w}_2(2,3))$ bildar två baser i R^2. Finn basbytesmatriserna från $\mathcal{F}$ till $\mathcal{G}$ och från $\mathcal{G}$ till $\mathcal{F}$. Vektorn $\overline{u}$ har koordinatermatrisen $(1,4)^t$ i basen $\mathcal{F}$. Finn koordinatermatrisen för samma vektor i basen $\mathcal{G}$.

   Svar: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $(3,0)^t$

6. Vilka av matriser A, B, C, D från uppgift 1 är ortogonalt diagonaliserbara, diagonaliserbara?

   Svar: A, B, D

7. Bestäm D^{100}, där D är från uppgift 1.

   Svar: $D^{100} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. Bestäm M^{50}, där M är avbildningsmatrisen från uppgift 2i.

   Svar: $M^{50} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & -\frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$