Övning 5-6 för Linjär algebra (TATA16)

1. Låt $\overline{u} = (-3, 2, 1, 0)$ och $\overline{v} = (4, 0, -1, 2)$.

   (a) Finn $\overline{v} - \overline{u}$ och $6\overline{u} + 5\overline{v}$. Svar: $(7, -2, -2, 2), (2, 12, 1, 10)$

   (b) Finn skalärprodukterna $\overline{v} \cdot \overline{u}$ och $(2\overline{u} - \overline{v}) \cdot (4\overline{u} + 3\overline{v})$ Svar: $-13, -58$

   (c) Finn längderna $|\overline{u}|$ och $|2\overline{u} + \overline{v}|$ Svar: $\sqrt{14}, 5$

2. Låt $\overline{u}$, $\overline{v}$ vektorer i R^n och k ett tal. Visa att

   (a) $|-2\overline{u}| = 2|\overline{u}|$,

   (b) $|k\overline{u}| = |k| \cdot |\overline{u}|$.

3. Verifiera om följande par av vektorer är ortogonala.

   (a) $\overline{u} = (-4, 6, -10, 1)$, $\overline{v} = (2, 1, -2, 9)$ Svar: Nej

   (b) $\overline{u} = (0, 3, -2, 1)$, $\overline{v} = (5, 2, 3, 0)$. Svar: Ja

4. Låt $\overline{u}$, $\overline{v}$ vara ortogonala vektorer i R^n. Visa att

   (a) $|\overline{u} + \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2$,
   Hint. $V.L. = \overline{u}^2 + 2\overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{v}^2$ och $H.L = \overline{u}^2 + \overline{v}^2$

   (b) $|\overline{u} + \overline{v}| = |\overline{u} - \overline{v}|$.

5. Finn skalärprodukterna $\overline{u} \cdot \overline{v}$ om $|\overline{u} + \overline{v}| = 1$ och $|\overline{u} - \overline{v}| = 5$. Svar: -6

6. Skriv ner vektorn $\overline{u} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ som en linjär kombination av vektorerna från stardardbasen i R^6. Ange koordinater av vektorn $\overline{u}$ i standardbasen.

   Svar: $\overline{u} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 3\overline{e_3} + 4\overline{e_4} + 5\overline{e_5} + 6\overline{e_6}, (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

7. Visa att alla polynom av grad ≤ 3 med standarda operationer bildar ett vektorrum.

   Hint. Utgå från definitionen

8. Visa att alla lösningar till ekv $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 0$ bildar ett underrum till R^5.

   Men alla lösningar till ekv $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 8x_4 - 2x_5 = -1$ bildar inget underrum till R^5.

   Hint. Använd kriterium om underrumet

9. Betrakta på det standarda linjera rummet R^2 en operation definierad av $\overline{u} \odot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}|$, där $|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Är operationen $\odot$ en skalärprodukt på R^2?

   Svar: Nej